NMS –
NATURVETENSKAP,
MATEMATIK OCH
SAMHÄLLE

Examensarbete i Matematik och lärande

15 högskolepoäng, avancerad nivå

Semiotiska register och didaktiska möjligheter vid introduktionen av bråk i fem svenska läromedel

Semiotic Registers and Didactic Potentials in the Introduction of Fractions in Five Swedish Textbooks

Maja Ahlström
Clara Rengbo

Grundlärarexamen med inriktning mot arbete i årskurs F-3, 240 högskolepoäng
Datum för examinationsseminarium (2026-03-23)

Examinator: Anna Wernberg
Handledare: Helen Hasslöf

Förord

Detta examensarbete markerar slutet på vår utbildning till grundlärare med inriktning mot grundskolans F-3 vid Malmö universitet. Resan mot färdiga lärare har varit både utmanande och lärorik och detta arbete har gett oss en fördjupad förståelse för matematikdidaktikens komplexitet.

Vårt intresse för hur bråkbegreppet introduceras väcktes under våra perioder av verksamhetsförlagd utbildning, där vi såg hur central roll läromedlen spelar i klassrummet. Genom att undersöka dessa verktyg hoppas vi kunna bidra med insikter som kan stärka både vår egen och andras framtida undervisningspraktik.

Arbetet med studien har präglats av ett nära och likvärdigt samarbete där vi gemensamt har tagit ansvar för helheten. Planering av studien, utformning av syfte och forskningsfrågor samt val av teoretiskt ramverk har gjorts i samråd. Den tematiska innehållsanalysen av läromedlen har genomförts gemensamt för att säkerställa en samstämmig kodning och tolkning av datamaterialet. Skrivprocessen har fördelats så att vi båda har varit delaktiga i samtliga kapitel för att skapa en sammanhängande röd tråd. Vi har löpande läst och reviderat texten tillsammans, vilket innebär att vi båda ställer oss bakom arbetet i dess helhet.

I arbetet med detta examensarbete har generativa AI-verktyg (Gemini) använts som ett stöd. Verktyget har nyttjats för synonymer och översättning av text från andra språk än svenska. All bearbetning av empiri, teoretisk analys, och slutgiltig granskning av innehållet har genomförts av oss författare. Vi tar fullt ansvar för arbetets originalitet, källhänvisningar och de slutsatser som presenteras i denna studie.

Vi vill rikta ett stort tack till vår handledare Helen Hasslöf, för värdefull vägledning, kloka synpunkter och uppmuntran genom hela skrivprocessen. Din expertis har varit avgörande för att forma studien.

Vi vill även tacka de vänner och familjemedlemmar som har stöttat oss under denna intensiva period. Ett särskilt tack går till de lärare som vi fått låna läromedlen av och även till våra kurskamrater för givande diskussioner och respons under seminarierna.

Slutligen vill vi tacka varandra för ett fantastiskt samarbete, där vi genom gemensamt engagemang och många diskussioner har rott detta projekt i hamn.

Abstract

This study examines how fractions are introduced in mathematics textbooks for grade two, with a focus on the types of representations used and how these interact in the presentation of the center. Based on Duval´s (2006) theory of semiotic representation registers, five commonly used Swedish textbooks were analysed through a structured textbook review a thematic approach.

The results show that the area model dominates as the main figurative representation, while the variation of other forms of representation is limited. Progression is mainly achieved through an increased number of tasks rather then through shifts between registers, which provides few opportunities for conversion between representations. According to Duval, such conversions are essential for developing a deeper conceptual understanding. At the same time the textbook offers didactic strength in the form of clear visual models and everyday examples that can support students in their initial encounters with fractions.

The study shows that the textbooks offer a basic introduction to fractions, but the narrow use of representations may limit students' opportunities to develop a broader and more adaptable understanding. The results indicate that the textbooks with additional representations and tasks that support both coordination and conversion between Duval´s (2006) semiotic representations register.

Keywords: Fractions; Semiotic representation registers; Mathematics Textbooks; Early mathematics education; Conversion and treatment.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Matematikundervisning i de tidiga skolåren lägger grunden för elevers fortsatta lärande och relation till ämnet. Inom grundlärarutbildningen med inriktning mot F-3 har vi mött matematik både i teori och praktik och uppmärksammat hur avgörande undervisningens utformning är för elevers möjligheter att förstå matematiska begrepp. Särskilt tydligt har detta blivit i mötet med begrepp som upplevs som abstrakta, exempelvis bråk. I undervisningssituationer och under verksamhetsförlagd utbildning har vi sett hur elever ofta behöver stöd genom bilder, konkreta material och vardagsnära exempel för att kunna skapa mening. Detta väckte vårt intresse för hur matematiska representationer används och i synnerhet hur de presenteras i de läromedel som ofta utgör en stor del av undervisningen i årskurs 2.

I skolans kontext har läromedel en framträdande roll. Grevholm (2014) beskriver att för många lärare fungerar matematikläroboken som ett stöd vid planering, genomförande och strukturering av undervisningen. Samtidigt är det genom läromedlen som elever möter matematikens innehåll i en systematiserad form. Enligt läroplanen för grundskolan, Lgr 22 (Skolverket, 2022), ska undervisningen i matematik ge eleverna förutsättningar att utveckla förståelse för matematiska begrepp och samband samt förmåga att använda och tolka olika uttrycksformer såsom symboler, bilder, tabeller och muntliga beskrivningar. Detta ställer krav på att undervisningen erbjuder variation i hur innehållet presenteras, så att elever ges möjlighet att möta matematiken på flera sätt.

Bråk är ett innehållsområde som introduceras tidigt i grundskolan och som många elever senare upplever svårigheter med. Forskning har visat att elevers tidiga möten med bråk har stor betydelse för hur de utvecklat förståelse för rationella tal längre fram i skolgången. Enligt Berggren (2023) sker ofta den första formella introduktionen av bråk i årskurs 2, vilket gör denna fas särskilt betydelsefull. Hur bråk representeras genom exempelvis bilder, symboler, vardagssituationer eller språkliga förklaringar kan påverka vilka föreställningar elever utvecklar. Undervisning eller läromedel som domineras av en enskild representationsform riskerar att begränsa elevernas förståelse, medan en varierad användning av representationsformer kan stödja begreppsutvecklingen.

Ur ett didaktiskt perspektiv blir det därför relevant att granska hur läromedel förhåller sig till representationer av bråk. Läromedel är inte neutrala bärare av kunskap utan speglar val och prioriteringar kring hur innehåll ska presenteras och struktureras (Englund, 2012). Genom att analysera vilka representationsformer som används samt hur dessa samspelar kan viktiga didaktiska möjligheter och begränsningar synliggöras. Detta är en central didaktisk fråga för alla årskurser, då professionen innebär ett ständigt behov av att kritiskt ta ställning till hur läromedel används, anpassas och kompletteras i undervisningen.

I ett bredare samhällsperspektiv är matematisk förståelse av stor betydelse. Matematik är inte enbart ett skolämne utan ett verktyg som används i vardagsliv, arbetsliv och samhällsdeltagande. Förmågan att förstå bråk och proportioner är centrala i allt från ekonomiska beslut till tolkning av information i medier och naturvetenskapliga sammanhang. Om elever tidigt får möjlighet att utveckla en stabil och flexibel förståelse av matematiska begrepp skapas bättre förutsättningar för ett aktivt deltagande i samhället. Siegler et al., (2012) menar att bristande förståelse å andra sidan riskerar att leda till svårigheter som kan följa elever genom hela utbildningssystemet.

Berggren (2023) beskriver att användning av flera representationsformer kan stödja elevers lärande men också att vissa representationer tenderar att dominera i läromedel. Studier har bland annat uppmärksammat hur ensidiga framställningar kan påverka begreppsförståelsen negativt. Samtidigt finns behov av fler studier som fokuserar på hur olika representationsformer samspelar i läromedel samt vilka didaktiska konsekvenser detta kan få, särskilt i de tidiga skolåren.

Mot denna bakgrund är det relevant att undersöka hur bråk introduceras i matematikläromedel för årskurs 2, med fokus på de representationsformer som används och hur dessa samverkar. Genom att analysera möjligheter och begränsningar i läromedlens representationer kan studien bidra med kunskap som är relevant för både lärarutbildning och praktisk undervisning.

1.1 Begreppsförklaring

För att underlätta förståelsen av studiens analys och resultat definieras här de centrala begrepp som utgör arbetets fundament. Begreppen är valda utifrån studiens syfte att granska hur bråkbegreppet introduceras genom olika representationsformer.

1.1.1 Representationsformer

Representationsformer är de olika sätt som matematiskt innehåll kan uttryckas och göras tillgängligt för elever. Enligt Ipek och Mainali (2025) kan dessa kategoriseras som konkreta, visuella, symboliska och verbala. I undervisning om bråk kan detta till exempel vara bilder, konkret material, muntliga förklaringar, skriftligt språk eller matematiska symboler. Sokolowski (2018) menar att olika representationsformer lyfter fram olika aspekter av ett begrepp och kan därmed stödja elevernas förståelse på olika sätt.

Duval (2006) betonar att matematiska idéer blir tillgängliga när de uttrycks genom någon form av representation. Därför är det centralt att elever får möta flera representationsformer och ges möjlighet att se hur olika uttryck kan beskriva samma matematiska innehåll. Enligt Duval utvecklas förståelse när elever kan urskilja och jämföra representationer och därigenom upptäcka den gemensamma matematiska idé som ligger bakom dem.

Sokolowski (2018) beskriver att de visuella representationsformerna omfattar bilder, figurer och grafiska illustrationer som synliggör det matematiska innehållet. Vidare beskriver Berggren (2023) att inom bråkundervisningen innebär detta ofta cirklar eller rektanglar som är uppdelade i lika stora delar där vissa delar är färglagda. Syftet med dessa är, enligt Ipek och Mainali (2025) att konkretisera innehållet genom visuellt stöd. I nära anslutning till detta finns de konkreta representationsformerna, som enligt Sokolowski (2018) syftar på framställningar som anknyter till vardagliga situationer eller föremål. I läromedel uttrycks detta ofta genom illustrationer av pizzor, chokladkakor eller frukter som delas (Berggren, 2023). Dessa representationer knyter an till elevens erfarenhetsvärld och bidrar till igenkänning och sammanhang.

Duval (2006) beskriver de symboliska representationsformerna och menar att de avser matematikens formella språk, såsom bråknotationen ½ eller ¾ . Dessa bygger på siffror snarare än bilder och innebär ofta en övergång mot en mer abstrakt förståelse där eleven förväntas tolka relationen mellan täljare och nämnare. Som stöd för de övriga formerna finns språkliga representationsformer, vilka omfattar muntliga eller skriftliga förklaringar (Duval, 2006).I läromedelskontext handlar detta om instruktioner, texter som förklarar begrepp eller definitioner. Detta språkliga stöd är, enligt Ipek och Mainali (2025) ofta avgörande för hur elever tolkar både visuella och symboliska uttryck.

Slutligen beskriver Duval (2006) abstrakta representationsformer, vilket innebär att det matematiska innehållet frigörs från specifika bilder eller fysiska föremål för att istället behandlas som generella koncept. Enligt Duval uppstår denna abstraktion när eleven inte längre är beroende av en specifik modell utan kan tillämpa begreppet i dess renodlade form, vilket ofta sker genom den symboliska representationen.

1.1.2 Teori

För att förstå hur elever tillägnar sig bråkbegreppet används i denna studie Raymond Duvals (2006) teori om semiotiska representationsregister. Centralt för teorin är hur olika sätt att visa matematik, så kallade register, påverkar förståelsen. Duval (2006) benämner vissa av representationsformerna på andra sätt än ovanstående, det visuella benämns som figurativt, det konkreta som handlingsbaserat och det språkliga som verbalt. En närmare genomgång av teorins begrepp, såsom konvertering och kongruens, presenteras i kapitel 3, samt i en sammanställd begreppslista i Bilaga 2.

1.1.3 Bråk

Bråk är ett sätt att uttrycka delar av en helhet eller en uppdelning av ett antal. Ett bråk består av en täljare som anger hur många delar som avses och en nämnare som anger hur många lika stora delar helheten är uppdelad i.

Duval (2006) betonar att förståelse av bråk inte enbart handlar om att känna igen bråk symbolen, utan om att kunna urskilja den matematiska relation som bråket beskriver. Eftersom matematiska begrepp inte är något elever kan iaktta direkt behöver bråk presenteras på sätt som gör relationen mellan del och helhet tydlig och begriplig. En viktig del i detta är att elever får stöd i att se hur olika uttryck för bråk beskriver samma matematiska innehåll, så att bråket förstås som en relation och inte som två separata tal.

2 Syfte och forskningsfrågor

Syftet med denna studie är att skapa kunskap om hur bråk introduceras i matematikläromedel för årskurs 2 med fokus på vilka matematiska representationsformer som används och hur dessa samspelar i presentationen av innehållet. Vidare syftar studien till att belysa vilka didaktiska möjligheter och begränsningar som skapas genom de representationer som används, i relation till hur bråkinnehållet struktureras och kommuniceras till elever i lågstadiet.

2.1 Forskningsfrågor

Mot bakgrund av ovanstående är det intressant att undersöka hur matematiska representationer framställs i läromedel för årskurs 2 och hur olika läromedel skiljer sig åt i sin användning av dessa representationer. För att systematiskt kunna analysera detta har följande forskningsfrågor formulerats:

1. Vilka representationsformer används när bråk introduceras i matematikläromedel för årskurs 2?
2. Hur framställs progressionen i introduktionen av bråk genom de valda läromedlens registerförskjutningar?
3. Vilka möjligheter och begränsningar skapas genom de representationer som används i introduktionen?

3 Teoretisk utgångspunkt

I detta avsnitt presenteras den teoretiska utgångspunkt som ligger till grund för analysen i studien. Teorin fungerar som ett analytiskt raster genom vilket läromedlens framställning av bråk och användningen av olika representationsformer kan förstås och tolkas. Genom att tydliggöra centrala begrepp och perspektiv inom matematikdidaktisk representationsforskning skapas förutsättningar för en systematisk och teoretisk förankrad analys av det empiriska materialet.

Den teoretiska ramen för denna studie utgörs av Duvals (2006) teori om semiotiska representationer. En central utgångspunkt i Duvals teori är att matematiska objekt, till skillnad från fysiska objekt, aldrig är direkt tillgängliga för våra sinnen.

3.1 Den kognitiva paradoxen

En grundbult i Duvals (2006) teori är det han benämner som "den kognitiva paradoxen för matematiskt tänkande". Paradoxen består i att matematiska objekt (till exempel bråk) aldrig är direkt tillgängliga för människan genom perception eller konkreta föremål; de är abstrakta begrepp. För att kunna bearbeta eller kommunicera dessa begrepp krävs semiotiska representationer, såsom symboler, figurer eller ord. Duval betonar dock att det är av avgörande betydelse att skilja på det matematiska objektet och dess representation. En vanlig orsak till svårigheter i matematikundervisningen är att elever sammanblandar representationer med objektet, vilket leder till en begränsad instrumentell förståelse.

3.2 Semiotiska register

För att en representation ska vara matematisk användbar måste den tillhöra ett specifikt register. Duval (2006) definierar ett register som ett system av tecken som möjliggör specifika operationer. I analysen av bråkinnehåll i årskurs 2 är särskilt tre register relevanta:

- Det verbala registret: Naturligt språk som används för att benämna matematiska begrepp.
- Det figurativa registret: Visuella och geometriska representationer.
- Det symboliska registret: Matematiska notationssystem.

3.3 Kognitiva transformationer: Behandling och konvertering

Duval (2006) påstår att matematisk kompetens bygger på förmågan att utföra två fundamentalt olika typer av kognitiva transformationer: behandling (treatment) och konvertering (conversion).

3.3.1 Behandling (treatment)

Behandling innebär en transformation som sker inom ett och samma register. Det handlar om att följa de specifika regler som gäller för det aktuella teckensystemet för att nå en ny representation (Duval, 2006). I det symboliska registret kan detta vara att addera två bråk med gemensam nämnare. I det figurativa registret kan det handla om att rotera en bild eller dela upp en area i mindre delar. Behandling är ofta det som betonas i algoritmer och räkneövningar.

3.3.2 Konvertering (conversion)

Konvertering är en transformation som innebär att en representation byter register, men behåller sitt matematiska innehåll (Duval, 2006). Ett exempel är att tolka en illustration av en halv pizza och uttrycka detta som bråktalet.

Duval (2006) hävdar att konvertering är den mest komplexa kognitiva processen, då den kräver att eleven identifierar samma matematiska objekt i två helt olika teckensystem. Svårigheten förstärks av att olika register ofta är icke-kongruenta, vilket innebär att det inte finns någon direkt visuell likhet mellan exempelvis det skrivna ordet och siffran. Enligt Duval är förmågan till konvertering den säkraste indikatorn på genuin matematisk förståelse, då det är genom att växla mellan register som eleven kan frigöra det abstrakta objektet från dess specifika representationer.

3.4 Teorins tillämpning i studien

I föreliggande studie används Duvals (2006) ramverk för att systematiskt kategorisera vilka register som aktiveras i läromedlen vid introduktionen av bråk. Genom att identifiera i vilken utsträckning läromedlen uppmanar till behandling respektive konvertering kan studien belysa de didaktiska möjligheter och begränsningar som skapas för elevernas begreppsutveckling. För vidare begreppsförklaring inom teorin, se bilaga 2.

4 Tidigare forskning

Detta avsnitt syftar till att ge en översikt över tidigare forskning som är relevant för studiens fokus på matematiska representationsformer i läromedel. Genom att belysa forskning om representationsformers betydelse i matematikundervisning samt studier som analyserar hur matematiskt innehåll framställs i läromedel skapas en kontext för den föreliggande studien.

4.1 Betydelsen av flera representationsformer

Sokolowski (2018) betonar att elever i de tidiga skolåren behöver möta matematiska begrepp genom flera olika representationsformer för att utveckla en djupare förståelse. I studien betonas att visuella, konkreta och språkliga förklaringar tillsammans skapar bättre förutsättningar för att elever ska kunna tolka och använda matematiska idéer. Sokolowski (2018) menar att undervisning som enbart bygger på symboler riskerar att bli för abstrakt för de yngre eleverna, medan en varierad användning av representationer stödjer både begreppsbildning och problemlösning. Detta stöds även av Ipek och Mainali (2025) som betonar att lärares uppfattning av användandet av fler representationsformer spelar en avgörande roll för hur de integreras i undervisningen. Deras studie visar att representationer inte bara fungerar som verktyg för att konkretisera abstrakta begrepp, utan är fundamentala för att bygga broar mellan elevens informella kunskap och den formella matematiken. Med informell kunskap avses de vardagliga erfarenheter och intuitiva uppfattningar eleverna bär med sig, såsom en intuitiv förståelse av att dela en pizza rättvist mellan kompisar. Den formella matematiken innebär istället det strukturerade systemet av symboler, definitioner och regler, exempelvis att skriva och tolka bråktalet ¼ som en specifik relation mellan täljare och nämnare. Genom att använda representationer som exempelvis bilder av pizzor, kan läraren hjälpa eleven att översätta sin vardagliga förståelse till matematikens formella språk (Ipek & Mainali, 2025). Vidare lyfter Kataoka et al., (2021) fram att användningen av figurativa register och vardagsspråk fungerar som nödvändiga medierande verktyg för att barn ska kunna tillägna sig matematiska begrepp. De menar, i likhet med Duval (2006), att förmågan att mobilisera och växla mellan olika semiotiska register är själva kärnan i det matematiska lärandet, även vid introduktion av komplexa koncept i tidig ålder.

4.2 Bråk i läromedel

Berggren (2023) analyserar hur bråk representeras i elva svenska matematikläromedel för de tidiga skolåren och identifierar hur olika konceptuella metaforer styr introduktionen. Studien visar att läromedlen framförallt använder visuella representationer som geometriska figurer, vardagsobjekt och tallinjer, men att fördelningen är kraftigt obalanserad. Obalansen yttrar sig genom en kraftig dominans av visuella representationer, medan den linjära modellen i from av tallinjen är underrepresenterade. Detta innebär att eleverna främst möter bråk som statiska delar av objekt, snarare än som tal med en specifik position och storlek i relation till andra tal. En central slutsats är att de granskade läromedlen vilar på en “objekts-metafor”, där bråk uteslutande presenteras som del av helhet. Berggren (2023) belyser att ett begränsat urval av representationer, där exempelvis tallinjen utelämnas, kan leda till ensidig förståelse. En sådan begränsning riskerar att hindra elever från att se bråk som faktiska tal med en specifik position i talsystemet, vilket i sin tur påverkar hur de senare utvecklar mer avancerade matematiska färdigheter. Detta bekräftas av Sibiya och Essien (2025) som i sin analys av läromedel betonar vikten av läromedlens “affordances” det vill säga de specifika möjligheter till lärande som erbjuds genom valda representationer. De menar att en brist på variation i läromedlens uppgifter och modeller direkt kan begränsa elevens utveckling av matematisk färdighet inom bråkområdet. Berggrens (2023) resultat är därav särskilt relevanta för denna studie då de ger ett underlag för att analysera hur specifika val av representationsformer i årskurs 2 skapar olika didaktiska förutsättningar för elevernas begreppsutveckling.

4.3 Utmaningar vid introduktion av bråk

Introduktionen av bråk börjar ofta informellt redan i förskolan, där barn genom praktiska aktiviteter, som att dela frukt, möter grundläggande principer för delning. Trots dessa tidiga erfarenheter innebär övergången från naturliga tal till bråktal ett stort skifte för elever i lågstadiet (Sokolowski, 2018). Forskningen pekar på att svårigheter ofta ligger i att tolka de tecken och symboler som används. Duval (2006) menar att den kognitiva processen att gå från en bild till ett bråktal kräver en konvertering som inte är intuitiv för barn. Purnomo et al., (2024) belyser denna utmaning genom att kontrastera användningen av “rent matematiska former” mot “visuella former” i läromedel. De finner att balansen mellan dessa är avgörande; en för snabb övergång till abstrakta symboler kan skapa hinder medan en dominans av enbart visuella former kan göra det svårt för elever att generalisera kunskap.

Sokolowski (2018) lyfter fram att den största inlärningseffekten uppstår när undervisningen fokuserar på att röra sig mellan olika representationer. Om läromedlet endast presenterar "behandling" inom ett register riskerar eleverna att utveckla en procedurell färdighet snarare än en begreppslig förståelse (Duval, 2006; Sokolowski, 2018).

4.4 Läromedelsanalys i bråkundervisning

Internationell forskning visar att läromedel strukturerar bråkundervisning på olika sätt och därmed skapar varierande lärandemöjligheter. Hwang et al. (2021) analyserade amerikanska och sydkoreanska matematikläromedel och såg att uppgifternas representationer, kognitiva krav och variation skiljer sig markant mellan länderna. Skillnaderna yttrade sig främst genom att de sydkoreanska läromedlen i hög grad använde multipla representationer och ställde högre krav genom komplexa problemlösningsuppgifter. De amerikanska läromedlen visade å andra sidan en större dominans av repetitiva proceduruppgifter med fokus på symboliska representationer, vilket begränsade variationen i hur matematiska begrepp introducerades. Författarna visar att läromedel som erbjuder en variation av representationer ger elever bättre möjligheter att utveckla en begreppslig förståelse av bråk. Läromedel som domineras av enbart symboliska uppgifter ger däremot mer begränsade förståelse möjligheter. Liknande resultat framkommer i Tian och Siegler (2017), som visar att elever utvecklar djupare förståelse av bråk när undervisningen innehåller en variation av visuella och språkliga representationer. Deras studie understryker att olika representationer stödjer olika aspekter av språkförståelse och därmed skapar flera möjligheter till begreppsutveckling.

4.5 Slutsatser från forskningsfältet

Genomgången av tidigare forskning synliggör ett kunskapsfält som är enigt om att bråkbegreppets komplexitet kräver en medveten och varierad användning av representationsformer. Det rådande kunskapsläget pekar på en kritisk spänning mellan teorins krav på registervariation och läromedlens faktiska utformning. Att svenska läromedel tenderar att prioritera specifika visuella modeller (Berggren, 2023) skapar en viktig utgångspunkt för föreliggande studie, då det motiverar behovet av att närmare granska hur dessa modeller samspelar och skapa progression genom registerförskjutning som Duval (2006) beskriver som fundamentala för lärande.

Denna forskningsbakgrund visar att kvaliteten på elevernas lärandemöjligheter beror på om det finns en balans och variation mellan konkreta föremål, bilder och matematiska symboler. (Sibiya & Essien, 2025; Purnomo et al., 2024). Tidigare studier betonar även att läromedlets struktur ställer stora krav på lärarens didaktiska förmåga att guida eleven genom dessa transformationer (Kataoka et al., 2021). Genom att positionera vår studie i detta fält, kan vi använda dessa insikter som ett analytiskt verktyg för att identifiera didaktiska möjligheter och begränsningar i de valda läromedlen för årskurs 2.

5 Metod

Detta avsnitt redogör för studiens metodologiska val och hur undersökningen har genomförts. Här beskrivs val av metod, urval av läromedel, empiriinsamling samt den analysmetod som använts för att besvara studiens forskningsfrågor. Avsnittet syftar även till att motivera metodvalen i relation till studiens syfte samt att diskutera etiska överväganden och studiens tillförlitlighet.

5.1 Metodval

För att besvara studiens syfte och forskningsfrågor har en kvalitativ metod valts. Studien genomförs som en läromedelsanalys, där fokus ligger på att undersöka hur bråk introduceras och representeras i matematikläromedel för årskurs 2. Alvehus (2019) skriver att en kvalitativ metod möjliggör en fördjupad analys, denna analys används för att förstå hur matematiskt innehåll framställs genom text, bild och symboler samt vilka didaktiska möjligheter och begränsningar som kan identifieras. Backman (2016) framhåller att metodval behöver motiveras i relation till studiens syfte och forskaren tydligt bör beskriva hur analysen genomförs för att skapa transparens i forskningsprocessen.

5.2 Datainsamling

Empirin i studien utgörs av matematikläromedel för årskurs 2. Datainsamlingen genomförs genom en systematisk genomgång av de specifika kapitel eller avsnitt som behandlar introduktionen av bråk, i respektive läromedel. I linje med Ammerts (2011) beskrivning av läromedelsanalys som en närläsning av materialet, fokuserar datainsamlingen på hur innehållet framställs, vilket innebär att både textuella instruktioner och visuella element inkluderas.

För att konkretisera insamlingen och säkerställa att samma aspekter uppmärksammas i samtliga läromedel används en strukturerad analysguide (se bilaga 1). Analysguiden fungerar som ett protokoll där varje sida i läromedlet dokumenteras utifrån fastställda observationspunkter. Genom att använda analysguiden som ett verktyg för datainsamling skapas ett strukturerat underlag av citat, bildbeskrivningar och uppgiftstyper. Detta material utgör sedan basen för den efterföljande tematiska analysen.

5.3 Urval

Studiens empiriska material består av ett urval av matematikläromedel för årskurs 2. För att välja ut materialet har ett bekvämlighetsurval tillämpats. Bryman (2018) beskriver att ett bekvämlighetsurval innebär att forskaren väljer det material som finns mest lättillgängligt eller som bedöms vara mest relevant utifrån forskarens kännedom om fältet.

Grunden för urvalet i denna studie är författarnas erfarenheter från den verksamhetsförlagda utbildningen samt vikariat på andra skolor. Genom observation och praktiskt arbete i olika skolor har vi identifierat vilka läromedel som är mest frekvent förekommande i undervisningen för årskurs 2. Valet föll på de läromedel som vi sett används mest aktivt ute i skolorna, då dessa bedöms ha stor påverkan på den faktiska matematikundervisning som eleverna möter i vardagen.

Att välja läromedel baserat på deras faktiska användning i skolan ökar studiens ekologiska validitet, då resultaten kan kopplas till den rådande undervisningspraktiken (Cohen et al., 2017). Det är dock viktigt att poängtera att studiens resultat uteslutande avser de fem granskade läromedlen och inte kan ses som en generalisering av läromedelsmarknaden i sin helhet. Genom att fokusera på de böcker som skribenterna sett som mest frekventa kan studiens belysa didaktiska möjligheter och begränsningar inom ramen för detta specifika urval, vilket ger relevant inblick i det material många elever möter i vardagen. Totalt omfattar urvalet 5 läromedel från olika förlag för att möjliggöra en jämförelse mellan olika sätt att strukturera bråkinnehållet. De läromedel som har valts är Singma, Mattekojan, Prima matematik, Favorit Matematik och Eldorado. Nedan presenteras de utvalda läromedlen mer ingående.

5.3.1 Singma

Singma bygger på den singaporianska modellen som beskrivs som en välbeprövad metod för matematikundervisning och anpassad till den svenska kursplanen, belyser Natur & Kultur. Vidare lyfts lärarens centrala roll för elevers utveckling och lärande, där läromedlet ger stöd i hur lektioner kan planeras och hur elever kan stödjas och utmanas i sitt tänkande. Läromedlet bidrar även rill en röd tråd genom årskurserna och ger elever möjlighet att upptäcka och utforska matematiken (Natur & Kultur)

5.3.2 Mattekojan

Mattekojan är ett läromedel för årskurs F-3 som utgår från Lgr 22. Serien är utvecklad av verksamma lärare med lång erfarenhet av undervisning i de tidiga skolåren (Gleerups). Läromedlet är anpassat efter skolverkets bedömningsstöd i taluppfattning, vilket gör att progression och innehållet följer de förmågor som elever förväntas uppnå enligt Lgr 22.

5.3.3 Prima matematik

Prima matematik är ett av de mest använda läromedlen i matematik för lågstadiet och tydligt förankrad i Lgr 22 (specialpedagogiska skolmyndigheten, 2019). Serien är utvecklad av läraren och lärarutbildaren Åsa Brorsson och bygger på lång erfarenhet av undervisning i de tidiga skolåren. Prima lyfter fram resonemang och kommunikation som centrala delar av undervisningen, bland annat genom uppgifter där elever uppmuntras att förklara sina tankar och jämföra strategier.

5.3.4 Favorit matematik

På sin webbplats beskriver Studentlitteratur (2024) Favorit matematik som ”Sveriges mest använda matematikläromedel". Favorit matematik är ett basläromedel med en tydlig och strukturerad uppbyggnad. Materialet har sitt ursprung i Finland, där det uppskattas för sin progression och sina goda elevresultat. Enligt Hemmi och Ryve (2015) kännetecknas den finska matematiktraditionen av lärarledd undervisning, tydliga genomgångar och välorganiserade uppgifter. Detta skiljer sig från den svenska traditionen som historiskt sett har haft ett större fokus på elevaktivt arbete och eget räknande i boken. I Sverige blir läromedlets roll mer avgörande med tanke på att det ofta blir centralt för lärandet. (Grevholm, 2014).

5.3.5 Eldorado

Eldorado (Natur & Kultur) är ett matematiskt basläromedel för lågstadiet som karaktäriseras av ett undersökande och språkutvecklande arbetssätt. Enligt författarna Olsson och Forsbäck vilar seriens pedagogik på att eleverna ska upptäcka matematiska strukturer genom samtal och laborativa moment snarare än enbart genom tyst räknande. Innehållet är utformat för att möta målen i Lgr 22 med ett tydligt fokus på att gå från konkret till abstrakt representation. Genom att integrera olika uttrycksformer och formativa diagnoser syftar läromedlet till att utveckla elevens matematiska förmågor och begreppsförståelse i en vardagsnära kontext.

5.4 Etik

Eftersom studien baseras på dokument i form av tryckta läromedel aktualiseras inte de traditionella forskningsetiska kraven på informerat samtycke, nyttjande eller konfidentialitet (Vetenskapsrådet, 2017). Däremot har etiska överväganden gjorts i relation till upphovsrätt, objektivitet och god forskningssed.

I enlighet med god forskningssed läggs stor vikt vid att citera och referera till läromedelsförfattarna på ett korrekt sätt. Detta är en del av den vetenskapliga redligheten för att säkerställa att materialet inte tas ur sin kontext eller förvanskas i analysen (Vetenskapsrådet, 2017). Vidare förhåller sig studien till upprätthovliga principer genom att tillämpa citaträtten. Detta innebär att eventuella illustrationer eller textutdrag från läromedlen som återges i resultatet endast används i den omfattning som krävs för att kritiskt belysa och understödja den vetenskapliga analysen. I studien eftersträvas objektiv och opartisk hållning där analysen fokuserar på de didaktiska aspekterna av representationerna snarare än att utgöra en värdering av enskilda förlag eller läromedelsserier. Studiens syfte är att genom Duvals (2006) analytiska redskap synliggöra hur bråkbegreppet konstitueras i materialet. Genom att systematiskt använda begrepp från Duvals (2006) teori möjliggörs en analys som går bortom subjektiva omdömen och istället belyser läromedlens inneboende didaktiska strukturer. Detta är relevant då det ger en teoretiskt förankrad förståelse för vilka förutsättningar för lärande som skapas i mötet mellan elev och läromedel, vilket i sin tur bidrar till ökad transparens i den pedagogiska analysen.

5.5 Analys

För att systematiskt granska hur bråk introduceras i läromedlen tillämpas en kvalitativ tematisk innehållsanalys. Analysmetoden utgår från Braun och Clarkes (2006) ramverk för tematisk analys, vilket innebär en metodisk process för att identifiera, organisera och analysera mönster (teman) i datamaterialet.

Studiens analys har en deduktiv (teoretisk) ansats, vilket innebär att kodningen och de teman som genereras styrs av studiens teoretiska utgångspunkt och forskningsfrågor (Braun & Clarke, 2006). I detta fall fungerar Duvals (2006) teori om semiotiska representationer som ett analytiskt raster för att tolka läromedlens innehåll. Vid tillämpning av Duvals (2006) teori som analytiskt raster har specifika begrepp använts för att koda läromedlens innehåll. Analysen har fokuserat på att identifiera vilka register som dominerar introduktionen av bråk, samt i vilken utsträckning uppgifterna kräver konvertering mellan dessa. Begreppen kongruens och icke-kongruens har fungerat som verktyg för att bedöma svårighetsgraden i de transformationer läromedlen kräver av eleven. För en fördjupad förklaring av hur dessa begrepp definieras i relation till läromedelsanalysen, se kapitel 3 samt bilaga 2.

5.5.1 Analysprocessens sex faser

Analysarbetet följer den stegvisa modell i sex faser som förespråkas av Braun och Clarke (2006):

1. Bekantgörande med datamaterialet: Läromedlens introduktionsavsnitt om bråk studeras i sin helhet. Genom upprepad genomgång av text och bild skapas en överblick av hur innehållet presenteras för eleverna.
2. Generering av koder: Datamaterialet bryts ner i mindre enheter (koder) baserat på Duvals (2006) begreppsvärld. Varje sida i läromedlet kodas utifrån vilka semiotiska register som aktiveras (verbala, figurer, symboliska) och vilken typ av transformation som krävs av eleven (behandling och konvertering)
3. Sökande efter teman: Koderna grupperas i bredare teman som fångar mönster i läromedlens framställning (Braun & Clarke, 2006). Här söks svar på hur de olika registren samspelar och vilka typer av kopplingar som dominerar i introduktionen av bråk.
4. Översyn av teman: De preliminära teman kontrolleras mot datamaterialet för att säkerställa att de representerar läromedlen på ett korrekt sätt. I detta steg prövas temana mot studiens syfte för att se om de belyser didaktiska möjligheter och begränsningar.
5. Definition och namngivning av teman: Varje tema definieras och ges ett namn som beskriver dess essens. Enligt Braun och Clarke (2006) ska namnen vara beskrivande och analytiska. Ett tema kan exempelvis vara “Dominans av symbolisk behandling” eller “Implicit konvertering mellan språk och symbol”.
6. Produktion av rapporten: I resultatkapitlet presenteras de identifierade teman. Analysen illustreras med utdrag och exempel från läromedlen för att öka studiens transparens och validitet.

5.5.2 Analys på semantisk och latent nivå

Analysen genomförs på två nivåer i enlighet med Braun och Clarkes (2006) distinktion:

- Semantisk nivå: Här analyseras de explicita innehållet, det vill säga de specifika representationer som faktiskt syns på sidorna.
- Latent nivå: Här sker en tolkning av de bakomliggande didaktiska konsekvenserna. Med stöd i Duval (2006) analyseras vilka möjligheter till begreppslig förståelse som skapas genom dessa representationer samt vilka begränsningar som uppstår.

5.5.3 Begreppsanvändning i analysen

I studien används begreppen representationsformer och semiotiska register. För att förtydliga analysens teoretiska utgångspunkt är det viktigt att särskilja dessa. Termen representationsformer används i en bredare bemärkelse för att beskriva de olika uttryckssätt som förekommer i läromedlen. När dessa analyseras utifrån Duvals (2006) ramverk benämns de istället som semiotiska register.

Ett semiotiskt register definieras i denna studie inte enbart som en yttre form, utan som ett kognitivt teckensystem som tillåter specifika tillvägagångssätt (Duval, 2006). I resultatredovisningen används därför begreppet register när analysen avser hur eleven förväntas interagera med och transformera det matematiska innehållet, medan representationsformer används som en övergripande beskrivning av materialets utformning (Sokolowski, 2018).

6 Resultat och analys

I detta kapitel presenteras resultaten från den tematiska innehållsanalysen av läromedlen Singma, Favorit matematik, Eldorado, Prima och Mattekojan. Analysen har genomförts med utgångspunkt i Duvals (2006) teori om semiotiska representationsregister och fokuserar särskilt på vilka register som aktiveras, hur behandling sker inom register samt i vilken utsträckning konvertering mellan register möjliggörs. Fyra huvudteman framträdde i analysen, introduktion genom modeller, progression och registerförskjutning, registersamordning och konvertering samt begränsningar och didaktiska möjligheter. För vidare förståelse kring Duvals (2006) begrepp, se begreppslista i bilaga 2. I efterföljande kapitel kommer slutsatser att dras i förhållande till studiens forskningsfrågor och värderas i förhållande till kunskaper från tidigare forskning.

6.1 Areamodellen som dominerande representationsregister

Analysen visar att samtliga läromedel - Singma, Favorit Matematik, Eldorado, Prima och Mattekojan - introducerar bråk genom areamodellen, det vill säga genom att en helhet delas in i lika stora delar. Introduktionen sker främst genom visuella representationer i form av geometriska figurer såsom cirklar, rektanglar och trianglar.

I Prima inleds till exempel undervisningen med konkreta aktiviteter där eleverna ritar och klipper ut figurer och delar dem. Instruktionen uppmanar eleven att konkret:

> Prima (s.34): 1. rita och klippa ut två cirklar, 2. Dela ena cirkeln i två lika stora delar. Måla en av delarna. 3. Dela den andra cirkeln i fyra lika stora delar. Måla en av delarna.

Detta aktiverar ett handlingsbaserat register innan det figurativa tar över.
Eldorado använder vardagsnära exempel som mat och föremål innan övergång till geometriska figurer medan Favorit Matematik och Singma fokuserar på behandling inom det figurativa registret genom instruktioner som: “Måla halva cirkeln” Singma (s.131)
I Mattekojan aktiveras det symboliska registret tidigt genom att eleven förväntas para ihop en bild med rätt sifferuttryck.

För att ge en överskådlig bild av hur introduktionen av bråk struktureras i de utvalda läromedlen har en kartläggning gjorts utifrån studiens teoretiska ramverk. I tabell 1 sammanfattas de didaktiska val som görs i läromedlens första kapitel om bråk, med särskilt fokus på vilka representationsformer som aktiveras och hur de första uppgifterna utformas. Tabellen fungerar som en utgångspunkt för den efterföljande djupanalyser, där varje läromedels specifika möjligheter till registerbyten granskas närmare.

Tabell 1 struktureras utifrån Duvals (2006) begrepp om representationsregister och syftar till att synliggöra vilket register som aktiveras i den första introduktionen av bråk. Kolumnen *första ingången* avser vilket matematiskt objekt som etableras. *Typ av representation* relaterar till vilket semiotiskt register som dominerar. Det som står i vanlig text är det som finns i böckerna, det som står kursiverat är Duvals (2006) benämning. *Typ av uppgift* analyseras i termer av behandling inom register, det vill säga vilka transformationer som möjliggörs inom samma teckensystem. *Symbolisk koppling* indikerar om och när konvertering mellan figurativt och symboliskt register initieras.

Tabell 1

Läromedel	Första ingången	Typ av representation	Typ av uppgift	Symbolisk koppling
Prima	Del av helhet	vardagsnära + visuellt *handlingsbaserat+ figurativt register*	färglägga halva cirklar, rektanglar och trianglar.	senare
Eldorado	Del av helhet	vardagsnära + visuellt *handlingsbaserat+figurativt register*	Arbeta med geometriska cirklar, identifiera lika stora delar.	senare
Favorit Matematik	Del av helhet	visuellt *figurativt register*	Identifiera delar i vardagsnära situationer och figurer.	inte alls
Singma	Del av helhet	visuellt + symbolisk *figurativt*	Para ihop figur med rätt bråksymbol	senare

		register		
Matte Kojan	Del av helhet	konkret + visuellt *handlingsbaserat* + *figurativt register*	Rita och klippa ut cirklar och dela dem i lika stora delar.	ja

Utifrån Duvals (2006) teori kan dessa introduktioner förstås som en tydlig dominans av det figurativa registret. Det figurativa registret omfattar visuella och geometriska representationer som möjliggör arbetssätt såsom uppdelning, färgläggning och identifiering av lika stora delar. I Prima och Eldorado aktiveras även konkreta handlingar baserade på registret, vilket kan ses som en form av materiell representation.

Enligt Duval (2006) är matematiska objekt aldrig direkt tillgängliga, utan nås genom representationer. När ett objekt, i detta fall bråk, introduceras nästan uteslutande genom ett register som i detta fall det figurativa, finns en risk att eleven identifierar objektet med representationen. Detta kan leda till en monoregistral förståelse, där bråk uppfattas som "uppdelade figurer" snarare än som ett abstrakt matematiskt objekt.

6.2 Progression och registerförskjutning

Samtliga av de analyserade läromedlen visar en progression från del av helhet mot mer avancerade uppgifter, men enligt Duval (2006) är progression i svårighetsgrad inte synonymt med begreppslig utveckling om inte registersamordning sker. Progressionen bygger på att eleverna först möter bråk visuellt. Fokus ligger på att urskilja hur en helhet delas i lika stora delar, och hur begreppen hälften, tredjedel och fjärdedel introduceras tidigt i alla läromedel. I flera av materialen stannar progressionen på den visuella nivån.

För att vidare undersöka läromedlens didaktiska struktur har en kartläggning gjorts av balansen mellan olika register. Tabell 2 synliggör förekomsten av konkreta, figurativa och symboliska register i introduktionsfasen. Genom att ställa dessa register mot varandra blir det möjligt att identifiera potentiella registerförskjutningar och hur läromedlen väljer att introducera en ökad abstraktionsgrad för eleven.

Tabell 2: Tabellen synliggör registerförskjutning och möjlig progression mot ökad abstraktionsgrad.

Läromedel	Konkret	Figurativt	Symbolisk
Prima	Ja	Ja	Senare
Eldorado	Ja	Ja	Senare
Favorit Matematik	Nej	Ja	Nej
Singma	Nej	Ja	Senare
Mattekojan	Nej	Ja	Ja

Trots den gemensamma introduktionen varierar progressionen mellan materialen. Prima och Eldorado erbjuder en tydligare övergång från konkreta till visuella representationer. I Prima sker detta genom aktiviteter där eleverna ritar och klipper ut figurer som de sedan delar, vilket ger en förståelse innan de möter motsvarande visuella modeller. Eldorado och Prima använder vardagsnära helheter som stöd för att skapa konkret förankring innan eleverna går vidare till mer abstrakta figurer. I Favorit Matematik, Singma och Mattekojan används istället figurativa register som ett centralt stöd i undervisningen. I dessa läromedel ligger fokus i större utsträckning på arbetet med geometriska figurer snarare än vardagsnära exempel.

I Favorit Matematik och Singma består progressionen i att eleverna först identifierar delar av helheten genom färgläggning och därefter möter fler exempel på liknande visuella modeller. Mattekojan visar progression där eleverna först arbetar med visuella figurer och därefter kopplas dessa till symboliska uttryck. Eleverna får titta på geometriska figurer där olika delar är ifyllda och para ihop dem med rätt bråksymbol. Detta innebär att progressionen går från visuell identifiering till att knyta dessa till symboliska representationer utan att föregås av konkreta aktiviteter. I Favorit Matematik stannar progressionen länge i det figurativa och verbala registret. Eleven möter frågor som: *"Hur stor del är målad?"* (s.176). Detta kräver en verbal tolkning men ingen konvertering till siffrornotation i det inledande skedet.

I Prima och Eldorado syns en progression som kan beskrivas som en registerförskjutning vilket i detta fall innebär från det konkreta/verbala till det figurativa och slutligen det symboliska.

Enligt Duval (2006) är progression i svårighetsgrad inte liktydigt med begreppslig utveckling. Avgörande är om registersamordning sker. I flera av läromedlen sker en sekventiell förskjutning mellan register snarare än en parallell samordning. Detta innebär att elever kan arbeta inom olika register vid olika tidpunkter utan att nödvändigtvis utföra konvertering mellan dem. En linjär progression från konkret till symboliskt garanterar således inte att det matematiska objektet frigörs från sina representationsformer.

6.3 Registersamordning och konvertering

Duval (2006) framhåller att konvertering mellan register är den mest centrala kognitiva processen för matematisk förståelse. Läromedelsanalyserna visar att samtliga läromedel kombinerar flera representationer i introduktionen av bråk, men graden av samspel och tydlighet i kopplingarna varierar i tydlighet och funktion. I alla läromedel är de visuella representationerna centrala och fungerar som det primära stödet för elevernas förståelse. Geometriska figurer används genomgående för att illustrera hur en helhet delas i lika stora delar. Texten som följer dessa bilder är oftast kortfattade och instruerande, vilket innebär att eleverna främst får stöd i vad de ska göra snarare än hur relationen mellan del och helhet uttrycks i modellen.

För att fördjupa förståelsen av hur läromedlen guidar eleven mellan olika uttrycksformer har en analys av samspelet mellan text, bild och symbol genomförts. Tabell 3 sammanställer hur de verbala, figurativa och symboliska registren koordineras i materialet. Särskilt fokus läggs här på konverteringsprocessen och i vilken grad läromedlet lämnar tolkningsansvaret till eleven eller erbjuder explicit vägledning genom de didaktiska instruktionerna.

Tabell 3

Samspel mellan text och bild förstås som en samordning mellan verbalt och figurativt register. *Koppling mellan figurativ och symbolisk representation* analyseras som konvertering. *Elevens tolkninganſvar* indikerar graden av explicit vägledning i konverteringsprocessen.

Läromedel	Samspel mellan text och bild	Koppling mellan figurativ och symbolisk representation	Elevens tolkning ansvar	Exempel
Prima	Tydlig	Symboler senare	Lågt	Rita/klippa former
Eldorado	Bild styr	Symboler senare	Medel	Identifiera delar
Favorit Matematik	Bild styrd	Ingen symbol i början	Högt	Färglägga delar
Singma	Tydligt	Para ihop bild och symbol	Medel	Färglägga/para ihop
Mattekojan	Tydligt	Symboler tidigt	Medel	Färglägga + skriva bråk

I flera av läromedlen, framför allt Singma och Mattekojan förstärker text och bild varandra genom att instruktionen hänvisar direkt till den visuella modellen. Detta betyder enligt Duval (2006) att konverteringen är kongruent, vilket innebär att det råder en direkt visuell korrespondens mellan bild och symbol. Ett exempel på detta är när eleven ser en figur delad i två och ska skriva ½ precis bredvid. Detta underlättar konverteringen men utmanar inte nödvändigtvis eleven att frigöra begreppet från den specifika bilden.

I Prima sker samspelet då eleverna först arbetar konkret genom att rita och klippa ut figurer. Denna typ av aktivitet skapar en tydlig övergång från konkret handling till visuell modell, vilket ger eleverna en förförståelse innan de möter mer abstrakta representationer.

I Eldorado sker kopplingen mellan visuella och symboliska uttryck i två steg. Eleverna arbetar först med bilder av uppdelade figurer och symbolerna introduceras senare. När symbolerna väl kommer in förväntas eleverna känna igen hur bråket skrivs utifrån de visuella modellerna de tidigare arbetat med. Den visuella representationen fungerar därmed som utgångspunkt, medan symbolerna kopplas på i ett senare skede. När eleven får instruktionen: "dela den ena cirkeln i två lika stora delar" Prima (s.34), tvingas eleven utföra en konvertering från en verbal instruktion till en fysisk och därefter figurativ representation. Detta kan ses som en djupare form av registersamordning än att enbart para ihop färdiga bilder med symboler.

6.4 Begränsningar och progression i läromedlen

Ur Duvals (2006) perspektiv kan progression i läromedlen analyseras utifrån hur olika representationsregister introduceras och samordnas. I flera av läromedlen förekommer symboliska representationer i begränsad omfattning eller inte alls i det inledande skedet. I Favorit Matematik introduceras inga bråk symboler i början, vilket innebär att bråk uttrycks genom ord som hälften, en tredjedel och en fjärdedel utan en parallell symbolisk representation. Därmed saknas en direkt koppling mellan bild och symbol i de första uppgifterna. I Eldorado introduceras bråksymbolerna senare i avsnittet, vilket innebär att de visuella modellerna presenteras före de symboliska uttrycken.

Som ett vidare steg i analysen har didaktiska begränsningar identifierats och den erbjudna progressionen sammanställts. Tabell 4 belyser hur läromedlen hanterar övergången från konkreta till abstrakta representationsformer samt var det uppstår glapp i det systematiska stödet för elevens begreppsutveckling. Genom att granska begränsningar i såväl text som symbolik synliggörs de utmaningar som eleven ställs inför när eleven förväntas navigera mellan olika register på egen hand.

Tabell 4 sammanfattar identifierade begränsningar och progression i läromedlens introduktion av bråk.Tabellen är skapad utifrån Duvals (2006) teori. Kolumnen *Begränsningar i symbolik* relaterar till förekomsten och aktiveringen av det symboliska registret. *Begränsningar i text* analyseras i relation till det verbala registret och dess funktion. Kolumnen *Progression (konkret->abstrakt)* analyseras som registerförskjutning. *Saknade eller otydliga kopplingar* relaterar till frånvaro av icke kongruent konvertering samt begränsad registerbredd.

Tabell 4

Läromedel	Begränsningar i symbolik	Begränsningar i text	Progression (konkret -> abstrakt)	Saknade/otydliga kopplingar
Singma	Symboler finns men fokus ligger på visuella delar.	kortfattad	del av helhet -> dela figur-> symbol -> del av antal	Tallinje, bråk jämförelse

Favorit Matematik	Inga symboler i början	kortfattad, eleven tolkar själv	Del av helhet-> fler visuella exempel	Tallinje, avsaknad av symboliska former
Eldorado	Symboler först senare	kortfattad	Del av helhet -> dela figurer- jämföra-> symbol->	Tallinje
Mattekojan	Symboler och figurer parallellt	kortfattad	Del av helhet -> visuell + symbol	Tallinje, förklaring till varför 2/4=1/2
Prima	Symboler	kortfattad	Del av helhet-> konkret	Tallinje, jämförelse mellan bråk

I Singma förekommer en tydlig koppling mellan bild och symbol genom uppgifter där eleverna ska identifiera vilken bråksymbol som motsvarar en markerad del av figuren. Fokus ligger på att känna igen hur en del av helheten representeras visuellt och symboliskt. I Mattekojan används bild och symbol parallellt redan från början, då eleverna ska matcha figurer med motsvarande bråksymbol. I detta material introduceras därför de två representationsformerna samtidigt, utan en tydlig förskjutning från den ena till den andra.

En annan begränsning är att texterna i läromedlen är av kortfattande karaktär. Instruktioner som: “Ringa in” eller “Måla” Favorit Matematik (s.177-179) detta fokuserar på aktiviteten snarare än att förklara de matematiska relationerna mellan del och helhet. Detta lämnar ett stort tolkningsansvar hos eleven. Det saknas ofta uppgifter som kräver icke-kongruent konvertering, till exempel att förklara varför två olika figurer kan representera samma bråkdel trots olika utseende.

Progressionen varierar mellan läromedlen. Prima och Eldorado erbjuder en tydlig övergång från konkreta aktiviteter till visuella modeller. Eleverna får först rita, klippa och dela figurer. Detta skapar en konkret förståelse innan de möter mer abstrakta representationer. I Singma, Favorit Matematik och Mattekojan introduceras symbolerna tidigare än i de andra läromedel vi analyserat, vilket skapar en tydligare koppling mellan bild och symbol. Däremot saknas en övergång till mer abstrakta resonemang i form av jämförelser mellan bråk och bråk på tallinje.

Eftersom samtliga läromedel fokuserar på del av helhet finns en risk att elever utvecklar en föreställning om att bråk alltid handlar om att dela en figur. Ingen av materielen introducerar bråk på tallinje i det inledande avsnittet. Flera läromedel saknar också uppgifter som förklarar varför två olika representationer kan uttrycka samma bråk, exempelvis varför 2/4 motsvarar ½. Utifrån Duval (2006) kan begränsningarna förstås med hjälp av den kognitiva paradoxen, som innebär att matematiska objekt nås genom representationer, men riskerar samtidigt att reduceras till dem. När bråk uteslutande presenteras genom areamodellen finns risk att objektet identifieras med just uppdelade figurer. Avsaknaden av tallinje innebär att bråk inte framträder som tal på en kontinuerlig skala, vilket begränsar registerbredden. Begränsad förekomst av icke-kongruent konvertering kan också innebära att elever inte ges möjlighet att frigöra bråkbegreppet från enskilda visuella strukturer.

6.5 Didaktiska möjligheter i läromedlens framställning av bråk

Analysen visar att läromedlen innehåller olika typer av uppgifter och representationer som ger utrymme för samtal, jämförelser och praktiskt arbete. Dessa möjligheter framträder genom de aktiviteter och representationsformer som faktiskt förekommer i materialen.

Som ett avslutande steg i resultatredovisningen presenteras i tabell 5 de didaktiska möjligheter som identifierats i de fem läromedlen. Medan föregående tabell fokuserade på begränsningar, lyfter denna sammanställning fram materialets potential att stödja eleven lärande genom samtal, praktiska aktiviteter och resonemang. Tabellen synliggör hur läromedlen skapar utrymme för registersamordning och fungerar som en brygga till studiens avslutande diskussion om lärarens roll i förhållande till läromedlet.

Tabell 5 synliggör de didaktiska möjligheter som identifierats i de 5 analyserade läromedlen. Kolumnen *Samtal* relaterar till aktivering av det verbala registret. *Jämförelse* analyseras som potentiella tillfällen för icke-kongruent konvertering. *Praktiska aktiviteter* kan förstås som behandling inom ett materiellt eller figurativt register. *Resonemang* indikerar möjligheter till registersamordning.

Tabell 5

Läromedel	Samtal	Jämförelser	Praktiska aktiviteter	Resonemang
Singma	"Vem har rätt?"	jämför olika uppdelningar	färglägga, para ihop	motivera val
Favorit Matematik	Vardagsnära exempel	identifiera delar	färglägga	bildtolkning
Eldorado	vardagsnära exempel och samtal om lika stora delar	Hitta felaktiga uppdelningar	Dela figurer	Förklara lika delar
Mattekojan	samtal om del-helhet	Olika bråk	Färglägga, skriva bråk	Beskriva delning
Prima	Samtal om hur figurer delas	Olika uppdelningar	klippa, rita, dela	Beskriva egna exempel

I Singma finns uppgifter där elever ska avgöra: "vem har rätt" Singma (s.148) där två karaktärer har delat en figur på olika sätt. Detta öppnar upp för muntliga resonemang och kräver att eleven rör sig mellan det figurativa registret och det verbala registret. Materialet innehåller även para-ihop uppgifter mellan figur och symbol. Detta skapar tillfällen att diskutera hur symbolen motsvarar den visuella modellen. Favorit Matematik innehåller vardagsnära exempel och uppgifter där elever identifierar delar av helheten, vilket kan användas som utgångspunkt för samtal om del av helheten.

Eldorado innehåller uppgifter där elever ska hitta felaktiga uppdelningar eller jämföra olika sätt att dela figurer. Detta är en didaktisk möjlighet för att motverka den kognitiva paradoxen, då det tvingar eleven att se bortom den ytliga bilden och istället fokusera på de matematiska egenskaperna.

I Mattekojan förekommer uppgifter där elever färglägger delar och skriver motsvarande bråk, vilket innebär att både bild och symbol används i samma aktivitet. Detta stöttar en samtidig samordning av register, vilket enligt Duval (2006) är en förutsättning för att eleven ska förstå att det är samma matematiska objekt som uttrycks på olika sätt.

Prima innehåller praktiska uppgifter där elever ritar, klipper och delar figurer, vilket ger möjlighet att beskriva hur en helhet delas och hur olika uppdelningar kan se ut.

Dessa uppgifter kan tolkas som potentiella tillfällen för konvertering och registersamordning. Förutsatt att läraren synliggör relationen mellan representationerna kan uppgifterna möjliggöra övergång mellan figurativt, verbalt och symboliskt register. Enligt Duval (2006) är det genom aktiv konvertering mellan minst två register som begreppslig förståelse utvecklas. De identifierade uppgifterna rymmer således didaktiskt potential, men denna är beroende av hur representationerna bearbetas i undervisningen.

7 Slutsats

Syftet med denna studie har varit att analysera hur bråk introduceras och representeras i läromedel för årskurs 2, samt att identifiera vilka didaktiska möjligheter och begränsningar dessa framställningar innebär för elevens utveckling. Studien har utgått från följande forskningsfrågor:

1. Vilka representationsformer används när bråk introduceras i matematikläromedel för årskurs 2?
2. Hur framställs progressionen i introduktionen av bråk genom de valda läromedlens registerförskjutningar?
3. Vilka möjligheter och begränsningar skapas genom de representationer som används i introduktionen?

Nedan presenteras studiens slutsatser utifrån den teoretiska analysen av läromedlen Singma, Favorit Matematik, Eldorado, Prima och Mattekojan.

7.1 Hur representeras och introduceras bråk i de analyserade läromedlen?

Analysen visar att introduktionen av bråk i samtliga läromedel som analyserats vilar på en stark dominans av det figurativa registret genom areamodellen. En central slutsats är att de läromedlen som analyserats i hög grad prioriterar det som Duval (2006) beskriver som behandling inom register framför konvertering mellan register. Eleverna tränas främst i att hantera och identifiera delar inom färdiga geometriska figurer, vilket enligt Duvals teori innebär att fokus ligger på figurativ behandling snarare än på att utveckla en förståelse för bråk som ett självständigt matematiskt objekt.

Utifrån Duvals (2006) teori om den kognitiva paradoxen kan vi dra slutsatsen att detta innebär en betydande risk. När bråk uteslutande presenteras som uppdelade figurer riskerar eleverna att identifiera det matematiska objektet med själva bilden. Om eleven inte möter de andra register, såsom tallinjen, begränsas deras förståelse av bråkets egenskaper som ett rationellt tal. Slutsatsen blir att de analyserade läromedlen i hög grad befäster en bild av bråk som statiska delar av figurer. Detta kan leda till att eleverna utvecklar en begränsad förståelse där bråk inte uppfattas som autonoma tal, utan som visuella instruktioner för att dela upp ytor. Utan variation i modeller riskerar objektet bråk att förbli dolt bakom areamodellens specifika uttryck, vilket försvårar elevens förmåga att senare generalisera kunskapen till matematiska sammanhang.

7.2 Hur ser progressionen och registerförskjutningen ut i läromedlens introduktion av bråk?

När det gäller hur de analyserade läromedlen leder eleven framåt i bråkområdet, kan vi sluta oss till att progressionen bygger på olika typer av registerförskjutningar med varierande hastighet. I Prima och Eldorado identifieras en gradvis förskjutning som inleds i ett handlingsbaserat eller vardagsspråkligt register för att sedan röra sig mot det figurativa registret. Denna långsammare förskjutning ger eleven möjlighet att förankra begreppet i kända erfarenheter innan abstraktionsnivån höjs. Favorit matematik uppvisar en liknande struktur där progressionen sker stegvis och där det figurativa registret används som en bro mellan vardagliga exempel och mer formella uttrycksformer. Även här ges eleven tid att etablera en grundläggande förståelse innan det symboliska registret introduceras.

I kontrast till detta uppvisar Singma och Mattekojan en betydligt snabbare progression mot det symboliska registret. Enligt Duval (2006) betyder detta att progression i dessa läromedel ofta likställs med ökad komplexitet inom det figurativa registret, exempelvis genom att dela figurer i fler delar, snarare än ökad grad av registersamordning. Vi ser att progressionen ofta stannar vid behandling inom ett register, vilket innebär att eleven tränas i procedurer snarare än i att förstå hur bråkbegreppet transformeras när det byter form från bild till siffra.

7.3 Registersamordning och konvertering

Duval (2006) betonar att konvertering mellan register är den enskilt viktigaste kognitiva processen för matematiskt lärande. Vår slutsats är att de analyserade läromedlen främst erbjuder kongruent konvertering. Det innebär att kopplingen mellan bild och symbol är visuellt direkt och intuitiv, exempelvis där antalet delar i en figur direkt motsvarar siffran i nämnaren. Denna form av konvertering kräver mindre kognitiv ansträngning än icke-kongruent konvertering, eftersom eleven kan förlita sig på visuell igenkänning.

Vi kan konstatera att läromedlen sällan utmanar eleven med icke-kongruenta konverteringar, där samma bråk presenteras i olika strukturella former eller där kopplingen mellan register inte är omedelbart synlig. Slutsatsen blir att läromedlen stöttar elevens förmåga att känna igen mönster och utföra enkla översättningar men att de i mindre utsträckning kräver den djupare registersamordning som är nödvändig för att eleven ska förstå att en halv (½) är samma matematiska storhet oavsett om den visas som en yta, ett antal eller en punkt på en linje.

Utifrån analysen framträder även att registersamordningen i läromedlen ofta sker som en följd av materialets struktur än som ett explicit didaktiskt mål. Eleverna möter bilder, symboler och språkliga förklaringar, men uttrycksformerna ställs sällan i relation till varandra på ett sätt som gör konverteringen till en medveten aktivitet. Detta innebär att eleverna inte ges systematiskt stöd i att urskilja det matematiska objektet oberoende av representationen, vilket enligt Duval (2006) är en förutsättning för begreppslig förståelse.

7.4 Vilka didaktiska begränsningar framträder i läromedlens framställning av bråk?

En kritisk slutsats rörande läromedlens begränsningar är den smala registerbredden, vilket framförallt synliggörs genom avsaknaden av tallinjen och symbolik i introduktionsstadiet. Genom att utesluta dessa går eleven miste om representationer som är nödvändiga för att förstå bråk som rationella tal med ett specifikt värde och läge i förhållande till andra tal. Detta skapar ett kognitivt gap där bråk förblir isolerande fragment av figurer snarare än en del av ett talsystem.

Ytterligare en begränsning som syns är att texterna i de analyserade läromedlen är övervägande operativa: de instruerar eleven om vad som ska göras, men förklarar sällan hur eller varför den valda representationen uttrycker en viss matematisk relation. Denna brist på verbal förklaring skapar en didaktisk begränsning där eleven lämnas för att tolka komplexa visuella tecken på egen hand. Utifrån Duvals (2006) tanke om den kognitiva paradoxen riskerar detta att leda till att eleven lär sig utföra instruktioner utan att faktiskt tillägna sig det underliggande matematiska begreppet.

7.5 Vilka didaktiska möjligheter framträder i läromedlens framställning av bråk?

Trots de identifierade begränsningarna drar vi slutsatsen att det finns betydande didaktiska möjligheter inbyggda i vissa typer av uppgifter som kräver aktiv reflektion och verbalisering. Uppgifter som presenterar dilemman eller uppmaningar, tvingar eleven att lämna den rent figurativa behandlingen och istället använda det verbala registret för att argumentera för sin sak. Dessa moment är avgörande eftersom de kräver att eleven samordnar olika register för att lösa ett problem. Slutsatsen är att de analyserade läromedlen erbjuder potential för djupare förståelse när de frångår enkla rutinuppgifter och istället utmanar elevens begreppsbildning. Denna potential är dock helt beroende av att läraren identifierar och aktiverar dessa möjligheter i klassrummet. Läromedlen fungerar därmed som en visuell grund, men kräver en medveten didaktisk strategi för att säkerställa att eleven kan röra sig fritt mellan matematikens olika sidor och därmed nå en fullständig registersamordning.

8 Diskussion

I detta kapitel diskuteras studiens syfte i relation till tidigare forskning och studiens teoretiska ramverk. Syftet är att belysa betydelsen av resultaten och sätta in dem i ett bredare matematikdidaktiskt sammanhang.

8.1 Ensidighet i modeller och dess konsekvenser

Ett centralt fynd i vår studie är att samtliga analyserade läromedel i årskurs 2 nästan uteslutande använder areamodellen för att introducera bråk. Detta resultat ligger i linje med Berggrens (2023) analys av svenska läromedel, men vår studie visar att denna dominans är genomgående oavsett läromedlets övriga pedagogiska profil. Ur ett teoretiskt perspektiv innebär detta en begränsad registerbredd. Duval (2006) betonar att en sådan ensidighet riskerar att leda till den kognitiva paradoxen, där eleven förväxlar det matematiska objektet med dess visuella representation.

Denna ensidighet i läromedlen blir problematisk när den ställs till det som Sibiya och Essiens (2025) skriver om läromedels affordances. Olika matematiska modeller erbjuder olika sorters affordances. Areamodellen möjliggör en förstålese för bråk som del av helhet, men de begränsar samtidigt elevens möjlighet att se bråk som ett tal med ett specifikt värde. Enligt Sibiya och Essien (2025) är det just läromedlens val av dessa erbjudanden som direkt påverkar elevens utveckling av matematiska färdigheter. Genom att utesluta tallinjen går eleverna miste om en kritisk möjlighet att förstå bråk som rationella tal (Siegler et al., 2012). Slutsatsen blir att läromedlen erbjuder en lättillgänglig ingång för elever i årskurs 2 som möter bråk för första gången, men att de begränsar deras matematiska progression genom att undanhålla de affordances som tallinjen representerar.

8.2 Balansen mellan det konkreta och det symboliska

Vi har sett stora skillnader i hur läromedlen hanterar progression och registerförskjutning. Läromedel som Prima och Eldorado väljer att dröja kvar i handlingsbaserad och vardagsnära register, vilket Kataoka et al., (2021) lyfter fram som en styrka. De menar att figurativa register och vardagsspråk fungerar som nödvändiga medierande verktyg för att barn ska kunna tillägna sig abstrakta begrepp.

Samtidigt visar vår analys att läromedel som Singma och Mattekojan har en snabbare förskjutning mot det symboliska registret. Här blir Purnomos et al., (2024) diskussion om balansen mellan “rent matematiska former” och “visuella former” relevant. De menar att en för snabb övergång till symboler kan skapa hinder, men att en dominans av visuella former kan göra det svårt för elever att generalisera sin kunskap. Våra resultat pekar på att de svenska läromedel som vi analyserat ofta väljer de ena eller det andra, snarare än att erbjuda den samtidiga registersamordning som Duval (2006) förespråkar.

8.3 Utmaningen med kongruens och tolkningsansvar

En av slutsatserna i vår analys är att konverteringen mellan bild och symbol i de analyserade läromedlen ofta är kongruent. Som Sokolowski (2018) betonar, uppstår den största inlärningseffekten när undervisningen fokuserar på att aktivt röra sig mellan olika representationer, särskilt när kopplingen inte är icke-kongruent.

Att texterna i de analyserade läromedlen är så pass kortfattade innebär att eleverna lämnas med ett stort tolkningsansvar. Detta resultat förstärker bilden av att de analyserade läromedlen fungerar som verktyg för behandling inom register snarare än som guider för konvertering mellan register. Detta ställer mycket höga krav på lärarens förmåga att agera brygga mellan de olika teckensystemen. Om läraren inte aktivt utmanar läromedlets kongruenta mönster, riskerar eleverna att utveckla en procedurell färdighet snarare än en begreppslig förståelse, helt i linje med Duvals (2006) resonemang.

8.4 Metoddiskussion

I detta avsnitt reflekteras kritiskt över studiens metodval, genomförande och de faktorer som påverkat dess kvalitet. Diskussionen struktureras utifrån begreppen validitet och reliabilitet, samt en kritisk granskning av urval och analysmetod.

8.4.1 Validitet: Hur väl studeras det avsedda?

Bryman (2018) förklarar att validiteten handlar om i vilken utsträckning studien faktiskt undersöker det som syftet avser. En styrka i denna studie är att vi har valt läromedel utifrån deras faktiska användning i skolpraktiken. Detta ökar studiens ekologiska validitet, som

Bryman (2018) menar innebär att studiens resultat kan generaliseras till verkliga miljöer och en hög ekologisk validitet innebär att studien fångar verkliga förhållanden. Å andra sidan har detta skett med hjälp av ett bekvämlighetsurval baserat på våra erfarenheter från VFU och vikariat. Om urvalet istället varit baserat på statistik, som visar att detta är de fem mest använda läromedlen i Sverige, skulle den ekologiska validiteten ökat (Bryman, 2018). Genom att inkludera fem olika läromedel med skilda pedagogiska profiler täcker studien en stor del av marknaden, vilket ger en god insikt i vad elever faktiskt möter.

Att använda Duvals (2006) teori om semiotiska register som ett deduktivt raster i den tematiska analysen har varit ett val för att stärka validiteten. Teorin är specifikt utvecklad för att förstå hur matematiska representationer fungerar kognitivt, vilket gör den till ett relevant verktyg för att besvara studiens forskningsfrågor. Alvehus (2019) menar att en tydlig teoretisk förankring i analysen är avgörande för att säkerställa att forskaren mäter det avsedda. Dock finns en begränsning i att vi endast analyserat introduktionsavsnitten. En högre validitet för elevernas totala begreppsutveckling över tid hade krävt att vi analyserat progressionen genom hela lågstadiet, men för studiens specifika syfte, att undersöka introduktionen bedöms avgränsningen vara ändamålsenlig (Ammert, 2011).

8.4.2 Reliabilitet: Studiens tillförlitlighet och transparens

Reliabilitet avser studiens tillförlitlighet och i vilken mån en annan forskare skulle nå samma resultat med samma metod (Cohen et al., 2017) . För att stärka reliabiliteten har vi tillämpat en systematisk datainsamling med en strukturerad analysguide (bilaga 1). Denna guide har fungerat som ett protokoll som enligt Ammert (2011) minskar risken för godtyckliga tolkningar under insamlingsfasen. Genom att vi som författare gemensamt har gått igenom materialet och diskuterar kodningen utifrån Braun och Clarkes (2006) sex faser, har vi strävat efter en hög grad av interbedömarreliabilitet.

En kritisk aspekt i kvalitativ analys är dock forskarens subjektivitet. Vid analys på latent nivå (Braun & Clarke, 2006), där vi tolkar didaktiska konsekvenser, finns alltid en risk för bias av vår egna förförståelse och att detta till viss del kan påverka resultatet. Vi har försökt att motverka detta genom att vara transparenta med vår analysprocess och genom att i resultatkapitlet presentera tydliga exempel och utdrag från läromedlen. Detta gör det möjligt för läsaren att kritiskt granska våra tolkningar i förhållande till empirin (Bryman, 2018).

8.4.3 Kritiska reflektioner kring urval och metod

Bekvämlighetsurvalet som tillämpats har både för- och nackdelar. Bryman (2018) förklarar att en fördel är att vi har kunnat fokusera på material som vi vet är relevanta för yrkesverksamma lärare. Nackdelen är att urvalet inte är slumpmässigt, vilket innebär att det kan finnas andra läromedel som presenterar bråk på ett annorlunda sätt som inte har fångats upp i denna studie.

Att använda en tematisk innehållsanalys har gett oss möjlighet att organisera stora mängder data i meningsfulla teman (Braun & Clarke, 2006). En risk med deduktiv ansats där teorin styr kodningen är dock att vi kan ha blivit "blinda" för didaktiska aspekter som inte ryms inom Duvals (2006) begreppsvärld. Vi anser dock att teorins precision väger upp för denna begränsning, då den tillhandahåller ett vetenskapligt språk som krävs för att genomföra en djupgående didaktisk analys av matematiska representationer.

8.5 Didaktiska implikationer för läraryrket

Studiens resultat belyser flera aspekter som är av direkt relevans för lärare i matematikundervisningen, särskilt vid introduktionen av bråkbegreppet i de tidiga skolåren. Eftersom de analyserade läromedlen uppvisar en tydlig dominans av areamodellen och det figurativa registret, ställs stora krav på lärarens medvetenhet om dessa begränsningar.

En central implikation är att lärare inte enbart kan förlita sig på läromedlets struktur för att säkerställa en djupare begreppsförståelse. eftersom studien visar att de analyserade läromedlen ofta fokusera på kongruenta konverteringar, vilar ansvaret på läraren att utmana eleverna med icke-kongruenta exempel. Detta kan innebära att presentera bråk som inte ser ut som de gör i boken, exempelvis genom att använda mängdmodeller eller att visa att en fjärdedel inte alltid måste vara en tårtbit.

Vidare pekar resultaten på vikten av att lärare aktivt introducerar de register som de analyserade läromedlen utelämnar, främst tallinjen. För att motverka den kognitiva paradoxen, där eleven tror att bråk är detsamma som en färglagd figur, behöver läraren medvetet arbeta med registersamordning. Det innebär att i undervisningen ständigt växla mellan att rita, skriva, prata och placera ut tal.

Studien understryker att de didaktiska möjligheterna i de analyserade läromedlen ofta ligger i de uppgifter som kräver reflektion och argumentation. För läraryrket innebär detta att läraren bör identifiera och prioritera dessa uppgifter snarare än de rent operativa "färgläggningsuppgifterna". Genom att använda läromedlet som en utgångspunkt för matematiska samtal, snarare än som ett verktyg för mekanisk färdighetsträning, kan läraren hjälpa eleven att frigöra det matematiska objektet från dess representation och därmed bygga en stabil grund för framtida matematikstudier.

8.6 Förslag till vidare forskning

Genomförandet av denna läromedelsanalys har synliggjort flera områden där det finns behov av ytterligare fördjupning för att öka förståelsen för hur matematiska representationer påverkar elevers lärande. Nedan presenteras förslag på vidare forskning utifrån andra metodval och innehållsområden.

Eftersom denna studie har fokuserat på det skrivna materialet i läromedlen, vore det av stort intresse att komplettera resultaten med en kvalitativ intervjustudie riktad mot verksamma lärare i lågstadiet. En sådan studie skulle kunna undersöka hur lärare faktiskt interagerar med läromedlets representationer i klassrummet- Det vore relevant att utforska i vilken utsträckning lärare medvetet stöttar de transformationer mellan register som Duval (2006) beskriver, eller om undervisningen i praktiken stannar vid den behandling som läromedlet erbjuder. Detta skulle kunna ge en djupare bild av gapet mellan det planerade innehållet i boken och den genomförda undervisningen.

Slutligen vore det värdefullt att applicera samma teoretiska ramverk på andra centrala områden i matematikundervisningen för lågstadiet. Exempelvis skulle en analys av hur likhetstecknets betydelse eller multiplikation introduceras kunna ge svar på om dominansen av vissa representationsformer är unik för bråkområdet eller om det är ett generellt mönster i svenska läromedel. Att undersöka hur progressionen mellan register ser ut i andra kapitel skulle bidra till en mer omfattande förståelse för läromedlens roll i att bygga en stabil matematisk grund.

Referenser

Ammert, Niklas. (2011). *Att spegla världen: läromedelsstudier i teori och praktik* (1:a uppl). Studentlitteratur AB.

Alvehus, Johan. (2019). *Skriva uppsats med kvalitativ metod: en handbok* (2:a uppl.) Liber.

Backman, Jarl. (2016). *Rapporter och uppsatser* (3:e uppl). Studentlitteratur AB.

Berggren, J. (2023). *Some conceptual metaphors of for rational numbers as fractions in Swedish mathematics textbooks for elementary education* https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00313831.2022.2114541#abstract

Braun, V., & Clarke, V. (2006). *Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology,* 3(2), 77-101.

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder* (3:e uppl). Liber.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2017). *Research methods in education* (8:e uppl). Routledge.

Duval, R. (2006) *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.* Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131.

Englund, B. (2012). *Läromedlens roll i undervisningen.* Skolverket.

Gleerups. Mattekojan matematik för F-3. https://www.gleerups.se/1-3/mattekojan

Grevholm, B. (2014). *Lära och undervisa matematik: från förskoleklass till åk 6.* (2:a uppl). Studentlitteratur.

Hemmi, K., & Ryve, A. (2015). Effective mathematics teaching in Finnish and Swedish teacher education perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(6), 501–521.

DOI 10.1007/s10857-014-9293-4
https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-014-9293-4

Hwang, S., Yeo, S., & Son, J. (2021). A comparative analysis of fraction addition and subtraction contents in the mathematics textbooks in the U.S and South Korea. *International Electronic Journal of Elementary Education, 13(4), 511-521.*
https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1297947.pdf

Ipek, A. S., & Mainali, B. (2025). *The perceptions of multiple representation of the US and Turkish mathematics teachers.* Mathematics Teaching Research. Journal 17(3) 223-248.
https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1481870.pdf

Kataoka, V.Y., Vita, A. C., & Silva,C. B. (2021) *The concept of chance in early childhood education: An analysis from the perspective of the register of semiotic representations.* Mathematics Teaching Journal, 13(4), 136-174.

Natur & Kultur. (u.å.). Singma. https://www.nok.se/laromedel/serier/singma/

Purnomo, Y. W., Julaikah,A. A., Hapsari, G. C. A., Oktavia, R. C., & Ikhshan, R. M. (2024) *A comparison of angle problems in Indonesian and Singaporean elementary school mathematics textbooks.* Mathematics Teaching Research Journal, 15(6), 146-162.

Sibiya, D., & Essien, A. A. (2025). *Affordances for developing mathematical proficiency in fraction word problems in South African textbooks.* South African Journal of Childhood Education, 15(1).
https://doi.org/10.4102/sajce.v15i1.1726

Siegler, R. S., Duncan, G.J., Davis-Keas, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). *Early predictors of high school mathematics achievement.* *Psychological science*, 23(7), 691-697.
https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Skolverket. (2022). Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet.

https://www.skolverket.se/download/18.11f7c7851925054d8c642/1727947566208/pdf13074.pdf

Specialpedagogiska skolmyndigheten. (2019). *Prima matematik 2A: grundbok* (punktskrift). https://webbutiken.spsm.se/prima-matematik-2a-grundbok-tryckt-punktskrift

Studentlitteratur. (2024). *Favorit matematik* 1-3. https://www.studentlitteratur.se/serier/favorit-matematik/favorit-matematik-1-3/

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 50(6), 614-620. https://doi.org/10.1177/0022219416662032

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed.* *https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2017-08-29-god-forskningssed.html*

Bilagor

Clara Rengbo och Maja Ahlström
Examensarbete 2026

Analysguide:

Syftet med de analysfrågor som används i studien är att på ett systematiskt och strukturerat sätt möjliggöra en fördjupad granskning av hur bråk introduceras i årskurs 2. Genom att ställa återkommande och jämförbara frågor till varje läromedel skapas förutsättningar för att synliggöra vilka matematiska representationsformer som används, hur dessa samspelar samt vilka didaktiska möjligheter och begränsningar som kan identifieras i läromedlens framställnig av bråkinnehållet. Analysfrågorna utgör därmed ett stöd för att säkerställa en konsekvent och transperant analys i relation till studiens syfte och forskningsfrågor.

Representationer - vad finns?

1. Hur introduceras bråk för första gången i läromedlet?
2. Vilka representationsformer används i introduktionen av bråk?
3. Vilka representationsformer förekommer mest respektive minst?
4. Förekommer fler representationsformer samtidigt eller var för sig?

Samspel - hur hänger de ihop?

5. Hur samspelar text och bild i introduktionen av bråk?
6. Hur kopplas symboler till visuella representationer?
7. Förklarar texten det som visas på bilden eller förutsätts eleven tolka själv?
8. Finns det exempel där representationer förstärker varandra?

Progression och struktur

9. Hur är introduktionen av bråk uppbyggd över sidorna?
10. Finns det tydlig progression från konkreta till mer abstrakta representationer?
11. Upprepas samma typ av representationer eller varieras de?

Didaktiska möjligheter

12. Vilka möjligheter ger representationerna för att arbeta vidare med bråk i undervisningen?

Bilaga 2: Begreppslista

Clara Rengbo och Maja Ahlström
Examensarbete 2026

Begreppslista

En tydlig och enkel begreppslista över Duvals (2006) teori om semiotiska representationsregister.

Semiotiskt register: Ett specifikt system av tecken som används för att representera ett matematiskt objekt. Exempel på register är det figurativa (visuellt, bilder), det symboliska (siffror, tecken), det verbala (ord, skrift) och det handlingsbaserade (konkret material).

Matematiskt objekt: Det abstrakta begreppet (t.ex talet "en halv") som vi aldrig kan se direkt, utan bara kan nå via olika representationer.

Representation: Den specifika formen objektet tar i ett register (t.ex en bild på en cirkel eller tecknet ½).

Behandling (Treatment): En förändring som sker inom ett och samma register. Exempel: Att räkna om 2/4 till 1/2 (behandling inom det symboliska registret) eller att dela en redan ritad kvadrat i fler delar (behandling inom det figurativa registret).

Konvertering (Conversion): En förändring där man byter från ett register till ett annat. Enligt Duval är detta den mest krävande men viktigaste processen för lärande. Exempel: Att titta på en bild av en tårta (figurativt) och skriva bråktalet 1/4 (symboliskt).

Kongruens: En "enkel" konvertering där det finns en direkt och tydlig visuell koppling mellan de två registren. Exempel: En bild med två delar där man ska skriva siffran 2 i nämnaren. Man "ser" siffran i bilden.

Icke-kongruens: En svårare konvertering där strukturen i de två registren inte stämmer överens direkt. Exempel: Att förstå en bild av fyra små bollar där två runda representerar 1/2 . Här måste eleven tänka om och inte baka räkna det som syns.

Registersamordning: När en elev kan växla fritt mellan olika register och förstå att de alla representerar samma underliggande matematiska objekt.

Registerförskjutning: Den gradvisa rörelsen i undervisningen från ett register till ett annat. Exempel: Från att klippa i papper till att rita bilder till att skriva siffror.

Registerbredd: Hur många olika typer av register som används för att förklara ett begrepp. Låg bredd begränsar förståelsen.

Den kognitiva paradoxen: Duvals (2006) idé om att man behöver representationer för att förstå matematik, men om man bara använder en sorts representation tror eleven att representationen är matematiken.

Monoregistral förståelse: När en elev bara kan förstå ett begrepp i ett enda register. Exempel: Kan visa "en halv" med en cirkel, men inte på en tallinje.

Operativ variation: Att medvetet använda olika register och icke-kongruenta uppgifter för att tvinga fram en djupare registersamordning hos eleven.