Naturvetenskap, Matematik och Samhälle

Självständigt arbete på grundnivå
15 högskolepoäng

Missförstånd i gymnasieskolans algebra

Misconceptions in upper secondary school algebra

Leo Ankarloo

Ämneslärarexamen med inriktning mot gymnasieskolan
Självständigt arbete på grundnivå
2025-01-21

Examinator: Clas Olander
Handledare: Jonas Dahl

Förord

Tack till min handledare och mina kursare som har läst och kommenterat under arbetets gång.

Abstract

Student understanding of algebra has always been rife with misconceptions. By studying and understanding these misconceptions, we become better equipped to help students form a solid conceptual understanding of mathematics. Studies which attempt to identify these misconceptions, as well as find ways to change students' minds about them through remediation, have been conducted, but there has been little in the way of attempting to consolidate the research. This work uses systematic searching to locate relevant literature, then summarizes and analyzes these studies in an attempt to find common themes and map our knowledge of student misconceptions. Despite a large body of research conducted over a long time, this study finds that the field of mathematical misconceptions still contains many gaps of knowledge, and that a lack of coherency in methodology and understanding of concepts between studies means that results are difficult to compare. It recommends that future research attempts to align itself according to some method, so that a coherent body of knowledge can be developed.

Innehållsförteckning

Inledning..... 5
Syfte och frågeställning..... 6
Metod..... 8
Sökord..... 8
Resultat..... 12
Analys..... 18
Begreppet missförstånd..... 18
Vanliga missförstånd..... 18
Identifikation av missförstånd i klassrummet..... 21
Remediering av missförstånd..... 22
Diskussion..... 25
Metodologi..... 25
Slutsatser..... 25
Referenser..... 29

Inledning

Det här ett arbete om missförstånd. Inte de vardagliga missförstånd som är en så naturlig del av våra liv, utan om felaktiga modeller för verkligheten: Felaktiga därför att de inte överensstämmer med världen omkring oss, eller matematikens lagar.

Jag kom i kontakt med den didaktiska forskningen kring missförstånd för första gången när jag studerade fysikdidaktik vid Lunds Universitet, då min lärare presenterade ett häfte med de vanligaste (felaktiga) modellerna som elever bildar sig kring mekaniken, komplett med bilder och diagram.

Häftet var resultatet av år av forskning. Inom den naturvetenskapliga didaktiken är missförståndsforskningen nämligen väletablerad, särskilt vad gäller fysik och kemi (Confrey, 1990). Duit (2009) uppskattar att över 8000 artiklar hade skrivits i ämnet redan 2009. Kurtuluş och Tatar (2021) sammanfattar resultatet av missförståndsforskningen med att sådana missförstånd förhindrar inlärningen av nya, korrekta modeller, att de kan formas vid tidig ålder och ofta är seglivade till den grad att en majoritet av universitetsstudenter bär runt på dem i någon form, men att undervisning utformad för att identifiera och rätta till specifika modeller är effektiv och ger långsiktiga resultat, särskilt vad gäller den konceptuella förmågan.

Jag blev omedelbart fascinerad. Själva modellerna som presenterades var så nära rationella att det var som att blicka in i en alternativ verklighet - en drömvärld, där fysiken korresponderade mer till intuitionen än till matematiken. Jag såg också snart potentialen för den här forskningen att hjälpa mig i min lärargärning. Missförståndsforskningen erbjöd ett fullständigt didaktiskt paket: en förteckning över de vanligaste felaktiga modellerna; tillhörande frågor utformade för att locka fram och identifiera dessa modeller; och slutligen botemedlet i form av förklaringar, bilder, experiment och simulationer som gör bristerna i respektive modell tydliga och hjälper eleverna att forma en ny, verklighetsanknuten modell – i facktermer, att *remediera* missförstånden.

Några år senare läste jag matematikdidaktik vid Malmö Universitet och stötte återigen på missförstånden, denna gången i form av en kort essä. Tanken att missförståndsforskning skulle kunna tillämpas på matematik hade slagit mig redan första kursen, men i essän började jag

skymta problemen med en direkt överföring. Matematiken är betydligt mer abstrakt än fysiken, och här förekom inga tydliga diagram över vad eleverna föreställde sig pågick.

Trots detta lockade de potentiella vinsterna. Skolverket (2025a) skriver att gymnasieskolans huvuduppgift är att förmedla kunskaper och skapa förutsättningar för att eleverna själva ska lära sig, ett arbete där hänsyn ska tas till elevernas olika förutsättningar och kunskapsnivå. En nyckelfärdighet för att bedriva skolans arbete är alltså att kunna identifiera dessa förutsättningar; att snabbt kunna känna igen vad som rör sig i elevernas huvud, vare sig det rör sig om kunskap, bristen på den, eller rent av misinformation och missförstånd.

Forskning på missförstånd rör koncept och förklaringsmodeller i elevernas sinnen som inte överensstämmer med verkligheten. Istället för att nöja sig med att identifiera *att* eleverna gjort misstag försöker man alltså att förklara *varför* dessa misstag begåtts, och intresserar sig då specifikt för de fall då misstagen beror på felaktiga modeller som eleverna uppfattar som korrekta (eller åtminstone funktionella), snarare än exempelvis slarvfel, rena gissningar eller språkliga begränsningar.

Inom matematikdidaktiken är missförståndsforskning inte lika utbredd som inom den naturvetenskapliga, men även här finns försök att applicera ett liknande tankesätt i syfte att fördjupa den konceptuella förståelsen (Confrey, 1990). Tooher och Johnson (2020) använder exempelvis i sin matematikdidaktiska forskning samma modeller och begrepp (misconceptions, remediation) som den naturvetenskapliga didaktiken. I svensk skola finns det också ett uttalat intresse för att utveckla den konceptuella förståelsen (Skolverket, 2025b), vilket gör missförståndsforskningen till en intressant kandidat för vidare undersökning.

I denna kunskapsöversikt försöker jag besvara frågan som väcktes i mig när jag läste den där korta essän, om huruvida missförståndsforskningen har något att ge matematikdidaktiken, och i sådana fall vad.

Syfte och frågeställning

Detta arbete syftar till att kartlägga missförstånd i en gymnasiekontext, och avgränsas därför till ungdomar i gymnasieåldern (16–19 år). Avgränsningen motiveras dels av att författaren som blivande gymnasielärare kommer att verka inom denna åldersgrupp, dels av att gymnasieelever räknar matematik på en nivå som ger missförstånden den komplexitetsgrad som är kartläggningens fokus.

Ett område inom matematiken som är ständigt hemsökt av missförstånd är algebran (Booth et al, 2014). Elever försöker subtrahera bort negativa tal, använder distributionslagen vid multiplikation av produkter, och adderar potenser med olika exponenter, ibland med övertygelse om att de gör rätt. Samtidigt är algebran central för elevernas matematiska utveckling (Veith et al., 2023). Detta arbete syftar till att kartlägga vilka försök som har gjorts att applicera missförståndsforskningens tankesätt på algebrans didaktik för ungdomar i gymnasieåldern, huruvida specifika felaktiga modeller har kunnat identifieras och vilka metoder som föreslås för att identifiera och remediera dem. Frågorna formuleras som följer:

Vilka vanliga missförstånd kring algebra har forskningen identifierat hos gymnasieelever?
Vad säger forskningen om vilka metoder lärare kan använda för att identifiera sådana missförstånd?
Vad säger forskningen om vilka metoder lärare kan använda för att remediera sådana missförstånd?

Metod

För att framställa denna kunskapsöversikt har en systematisk sökning och sammanställning utförts. Syftet med en sådan är att få ett brett perspektiv på forskningsläget inom ett visst område, medan effekten av författarens fördomar om vad som är god eller relevant forskning minimeras.

Sökningen begränsades till vetenskapliga tidskrifter, eftersom jag ville ha en överblick av forskningsläget, och till material som blivit peer-reviewed för att öka kvaliteten på artiklarna. Endast artiklar på svenska och engelska inkluderades, delvis eftersom jag inte behärskar några andra språk och delvis eftersom artiklar på dessa språk torde vara mer relevanta för en svensk kontext. Tre databaser användes: Education Research Complete (ERC), Education Resources Information Center (ERIC) och SwePub (den sistnämnda ledde dock i slutändan inte till några artiklar). I databasen ERIC kan sökresultaten filtreras utifrån vilken åldersgrupp materialet berör med en inställning, och i enlighet med översiktens syfte valde jag att bara inkludera resultat från secondary school.

Ingen begränsning från något särskilt datum sattes, eftersom jag antog att matematiska missförstånd inte ändras så mycket över tid. Detta bekräftades senare av artiklarna jag hittade (Merlin, 2013; O'Connor, 2022; Zielinski & Glazner, 2019).

Sökord

Sökord formulerades utifrån frågeställningen och förfinades efter hand. De bästa ordvalen var inte alltid intuitiva – ordet algebra uteslöts exempelvis, eftersom flera artiklar som skriver om det använder mer specifika termer (som exempelvis "kvadratiska ekvationer"). I Bilaga A presenteras alla iterationer av sökorden i de tre databaserna.

Sökningarna i SwePub gav två resultat, men ingen av dem visade sig i slutändan vara relevanta (se nedan). Följande söksträng användes slutligen i både ERC och ERIC:

misconception* AND ("error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or "Secondary Education").

Detta resulterade i 41 resultat i ERIC och 3 i ERC, totalt 44 artiklar. Artiklarna sållades därefter för hand baserat på kriterierna om elevernas ålder och matematiskt område (algebra) – alla 44 sökresultat kontrollerades i den ordning de presenterades av sökmotorn, och om relevansen inte framgick av titeln studerades abstractet. Sållningen i detta steg lämnade 14 artiklar. Dessa lästes i sin helhet, med undantag för *Implementing the Professional Standards for Teaching Mathematics: Learning from Your Students* av Margaret Farell, som inte gick att nå. Två av artklarna visade sig vid en närmare läsning inte beröra ämnet missförstånd – inklusive den otillgängliga artikeln uteslöts i detta sista steg alltså tre artiklar, vilket lämnade 11 artiklar.

Sökningarna i SwePub hölls mycket generella, där sökningarna *missförstånd AND matematik* och *missuppfattning AND matematik* resulterade i en vetenskaplig artikel vardera. En av artiklarna uteslöts på grund av fel ålderfokus, och den kvarvarande artkeln visade sig vid en närmare läsning handla om matematikspråk snarare än missförstånd. Inget material hämtades alltså i slutändan från SwePub.

På nästa sida presenteras samtliga 11 inkluderade artiklar.

Tabell 1: Slutgiltigt sökresultat, sorterat efter författare i bokstavsordning.

Artikel	**Databas**
Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem Solving*, 7(1).	ERIC
Gür, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67–80.	ERC
Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, *3*(3), 35–46.	ERIC
Makonye, J. P., & Khanyile, D. W. (2015). Probing Grade 10 Students about Their Mathematical Errors on Simplifying Algebraic Fractions. *Research in Education*, 94(1), 55–70.	ERIC
Merlin, E. M. (2013). Teaching Structure in Algebra. *Mathematics Teacher*, 107(4), 292–297.	ERIC
Reid O'Connor, B. (2022). Improving Student Proficiency in Solving Quadratic Equations. *Australian Mathematics Education Journal*, 4(2), 29–38.	ERIC
Schnepper, L. C., & McCoy, L. P. (2013). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research,* 15(1).	ERIC
Soneira, C. (2022). The Use of Representations When Solving Algebra Word Problems and the Sources of Solution Errors. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(5), 1037–1056.	ERIC
Tooher, H., & Johnson, P. (2020). The Role of Analogies and Anchors in Addressing Students' Misconceptions with Algebraic Equations. *Issues in Educational Research,* 30(2), 756–781.	ERIC
Tunzana, V., Mukuka, A., & Tatira, B. (2025). Exploring Grade 11 Learners' Understanding of Trigonometric Equations: An Evaluation of a Remedial Teaching Intervention. *Mathematics Teaching Research Journal*, 17(2), 80–103	ERIC
Zielinski, S. F., & Glazner, M. (2019). The No-to-Yes Project: Conquering Common Algebraic Mistakes That Drive Us and Our Students Crazy. *Mathematics Teacher*, 112(6), 432–438.	ERIC

Resultat

Nedan presenteras sammanfattningar av de elva artiklar som togs fram genom den systematiska sökningen. Därefter följer en analys, som väger källorna mot varandra för att sammanställa ett resultat. Ett försök har gjorts att ordna dem efter vilken fråga de är mest relevanta för att besvara: först vanliga missförstånd, sedan identifiering, och slutligen remediering.

Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving (Booth et al, 2014) är en amerikansk studie som utgår från kursen Algebra 1, tidigt i high school. Författarna intresserar sig för hur man kan omsätta missförståndsforskningen till praktik, och som ett led i detta försöker de undgå den höga tidsförbrukningen hos specialinsatser för diagnostisering och remediering genom att istället hitta metoder som utgår från standardmaterialet. Därför undersöker de dels vilka missförstånd som uppstår, men också vilka missförstånd som kvarstår efter undervisningen eleverna får på sin skola. De olika missförståndens effekt på testresultat undersöks också, för att identifiera vilka missförstånd som behöver prioriteras.

Baserat på utvecklingen över tid ger de vissa tidsbaserade rekommendationer, som att missförstånd kring negativa tal är naturligt i början och mitten av terminen, men att de elever som inte greppar det när terminen närmar sig sitt slut behöver åtgärder. De ser missförstånd kring likhetstecknet som särskilt bördig jord för åtgärder, eftersom undervisningen eleverna fick inte verkar bita på den, den leder till problem i senare årskurser, och det finns mycket material framtaget i annan forskning för att justera undervisningen så att missförstånden remedieras.

The Role of Analogies and Anchors in Addressing Students' Misconceptions with Algebraic Equations (Tooher & Johnson, 2020) är en irländsk pilotstudie som undersöker “anchoring” som metod för att remediera tre algebraiska missuppfattningar. Anchoring innebär att matematikuppgifter omformuleras för att förhindra missförstånd, genom subtila förslag, förenkling, mer konkreta situationer och liknande. Tanken är att elever som har förstått en sådan anchor sedan kan extrapolera resonemanget till svårare frågor, men metoden har tidigare mest undersökts inom statistikundervisning.

Missuppfattningarna som författarna intresserade sig för var:

1. “Reversal error”, där elever tror att samband mellan variabler uttrycks som en ratio ($20s=t$ betyder 20 stycken s för varje t),
2. Problem med likhetstecken, och
3. ‘Letters as objects’, att variabler förväxlas med föremålen som de behandlar (“antal kakor” blir “kakor”).

Studien bestod i två tester – Version A, med uppgifter designade för att trigga missförstånd, och Version B, som bestod av motsvarande frågor anpassade för att agera som anchors. Till detta tillkom intervjuer med några av deltagarna, utvalda för att de hade stor skillnad mellan version A och B och därför ses som kandidater för missförstånd.

Studien visade att missuppfattningar 1 och 3 var utbredda bland eleverna, men inte missuppfattning 2 i någon högre grad, vilket var oväntat utifrån tidigare forskning. De hittade begränsat stöd för anchoring, där en av frågorna stack ut som särskilt hjälpsam för remediering.

Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa (Luneta & Makonye, 2010) är en sydafrikansk studie som syftar till att identifiera och klassificera missförstånd kring matematisk analys. Författarna utförde ett test med fem frågor i en klass med elever i åldrarna 17-18 år, och inspekterade deras svar. De klassificerade varje fel utifrån om det rörde matematisk analys (”On topic”) eller något annat matematiskt område (”Not on topic”), samt utifrån vilken typ av resonemang som fördes för att nå fram till det felaktiga resultatet. Dessa resonemangskategorier (eller feltyper, som författarna kallar det) utgår inte ifrån vilken specifik matematik felet rör, utan ifrån hur eleverna har applicerat de matematiska regler de känner till – kategorierna skiljer alltså på om de exempelvis har övergeneraliserat en regel, hittat på en ny regel eller bara applicerat delar av en regel.

Luneta och Makonye anger också hur många elever som har gjort misstag av samma typ på varje fråga, så att utbredningen av varje missförstånd kan kartläggas. De drar slutsatsen att en stor del av felen kan förklaras av dåliga förkunskaper som inte är direkt relaterade till matematisk analys. Inom analysen ser de derivata som särskilt komplicerat, och föreslår grafiska representationer som ett möjligt botemedel.

Exploring Grade 11 Learners' Understanding of Trigonometric Equations: An Evaluation of a Remedial Teaching Intervention (Tunzana et al., 2025) är en sydafrikansk studie som undersöker om remediering utifrån missförstånd kan förbättra kunskaperna i trigonometri hos en klass i 16- till 17-årsåldern. Undersökningen genomfördes genom att låta ett förtest ligga till grund för två veckors remedierande undervisning, som kännetecknades av grafiska representationer. Därefter utfördes ännu ett test. I detta andra test hade snittresultatet gått upp.

Analysis of Misconceptions in High School Mathematics (Schnepper & McCoy, 2013) undersöker om formativ bedömning kan användas för att identifiera och remediera missförstånd. Författarna studerade 38 elevers misstag på en quiz och ett efterföljande prov och satte däremellan in åtgärder baserade på formativ bedömning. De lyckas identifiera en rad fel, som de delar in i kategorier – vissa av kategorierna de presenterar innehåller dock fel med andra möjliga förklaringar än missförstånd. Specifika missförstånd som lyfts är elever som tror att en av termerna i en summa kan förkortas bort när summan ingår i ett bråk (ett missförstånd kring bråk) och elever som inte distribuerar minustecknet när det står framför en parentes (ett missförstånd kring distribution och/eller negativa tal).

Slutsatsen är att formativ bedömning som utgår från kategoriserade missförstånd gör ett bättre jobb med att förbättra studieresultat än andra metoder som använder liknande missförståndsmodeller, men är inte särskilt effektiv för att råda bot på slarvfel eller bristande färdigheter från tidigare kurser.

The Use of Representations when Solving Algebra Word Problems and the Sources of Solution Errors (Soneira, 2022) är en spansk studie som undersöker hur gymnasieelever använder olika representationsformer (t.ex. teckningar och tabeller) när de löser algebraiska textproblem, samt var i lösningsprocessen fel uppstår. Studien är uppdelad i två faser: en kvantitativ del med 61 elever och en kvalitativ fallstudie med nio par.

Soneira visar att schematiska teckningar och tabeller kan hjälpa eleverna att bygga situations- och problemmodeller och att elever generellt sett gör detta med stor skicklighet, men att det inte

automatiskt leder till korrekta lösningar. De största problemen uppstår vid omvandlingen till ekvationer, ofta på grund av bristande förståelse kring likhetstecknet och vad en ekvation egentligen innebär.

För att åtgärda problemen föreslår Soneira undervisningsinsatser som stärker förståelsen för ekvationens natur och likhetstecknets innebörd, samt ett större undervisningmässigt fokus på övergången från konkreta till formella representationer.

Probing Grade 10 Students about Their Mathematical Errors on Simplifying Algebraic Fractions (Makonye & Khanyile, 2015) är en sydafrikansk studie som undersöker "probing", en pedagogisk metod som bygger på att läraren ställer frågor utifrån de misstag eleverna gör för att få dem att själva inse vad som gått fel. Författarna utgår från en grupp på 15 elever, som får lösa en serie uppgifter kring förenkling av bråk. Därefter sorterar de deras misstag i en av åtta kategorier. Testet följs upp med intervjuer, där eleverna förhörs om sina resonemang och probing appliceras. Slutligen får de en ny omgång uppgifter på samma ämne.

Studien visar på en dramatisk förbättring, där 72 fel i första testet reduceras till ett enda fel i det andra. Detta fel tillhör kategorin ”careless mistake”, och författarna drar därför slutsatsen att inga missförstånd kvarstår. De föreslår att eleverna genom probing utvecklat en relationell snarare än instrumentell förståelse för matematiken.

Improving Student Proficiency in Solving Quadratic Equations (O'Connor, 2022) undersöker kvardröjande missuppfattningar kring andragradsekvationer hos 25 elever i åldern 16 till 17 år på en skola i Australien. Undersökningen bestod i ett skriftligt test följt av intervjuer. Föfattaren delar in de fel hon upptäckt i kategorier baserade på vilken del av stoffet den tillhör (kvadratiska ekvationer, exempelvis). För specifika elevlösningar anger hon vilken förmåga som saknades för att utföra uppgiften, exempelvis att de inte kunde subtrahera på båda sidor korrekt eller känna igen en andragradsekvation i faktoriserad form. Dessa bristande förmågor kallar hon ”misconceptions”.

Författaren drar slusatsen att missförstånd kring andragradsekvationer i hög grad finns kvar även i senare delen av gymnasieåldern, och föreslår att mer borde göras för att leta reda på bristande kunskap kring ämnet i tidigare ålder samt som en inledning på högre kurser.

The No-to-Yes Project: Conquering Common Algebraic Mistakes That Drive Us and Our Students Crazy (Zielinski & Glazner, 2019) presenterar ett slutfört amerikanskt projekt som syftade till att remediera 7 vanliga missuppfattningar inom algebra som artikelförfattarna plockat från litteratur och egen erfarenhet. Eleverna delades in i tre grupper, där en grupp deltog i hela projektet, en deltog i delar av projektet och en var kontrollgrupp. Samtliga grupper fick utföra ett förtest och ett eftertest för att se hur deras prestation förändrades. Både tester och undervisning i projektet utgick från missuppfattningarna: testen hade 28 frågor, fyra kring varje missuppfattning, och de elever som hade alla rätt kring en missuppfattning i förtestet fick ingen vidare undervisning i den under resten av projektet.

Undervisningen bestod i att eleverna fick titta på korta videor på 3-5 minuter som var och en behandlade en av de 7 missuppfattningarna, följt av en kort quiz på samma ämne. När de klarat quizen fick de möjlighet att testa sin kunskap med en kort "practice slip" i klassrummet i början av varje lektion. Fick en elev alla rätt på tre practice slips (som alltså måste utföras vid tre olika tillfällen; detta för att få "spacing" i undervisningen) ansågs de ha överkommit en missuppfattning. När eleverna på detta sätt överkommit alla sju missuppfattningar individuellt får de practice slips som rör samtliga missuppfattningar - klarar de dessa är de färdiga med projektet.

Projektet var framgångsrikt, då eleverna som deltog fullt ut i projektet förbättrade sina resultat avsevärt mer än kontrollgruppen. Eleverna i den tredje gruppen, som delvis deltog, fick resultat som låg mellan de två andra grupperna.

Trigonometry Learning (Gür, 2009) är en turkisk studie som undersöker missuppfattningar hos gymnasieelever och lärare kring trigonometri. 140 elever i åldern 15 – 16 samt sex matematiklärare deltog. Gür samlade in sin data genom ett diagnostiskt prov med sju frågor, lärarintervjuer och fyra veckors klassrumsobservationer.

Författaren visar på en serie olika fel, som inkluderar felaktig användning av ekvationer, logiskt ogiltiga resonemang (t.ex. att $\sin 2x/\cos 2x = 1/\sin^2 x \cdot 1/\cos^2 x = 1$), förvrängda definitioner och mekaniska räknefel. Hon diskuterar också vilka potentiella missförstånd som kan ha orsakat felen, vilket hon använder som grund för att kategorisera dem i fem grupper. Studien betonar att många av dessa fel grundas i missförstånd orsakade av tidigare felinlärning och att de blir till hinder i vidare studier.

Som åtgärder föreslås bland annat att bygga broar mellan tidigare och ny kunskap, arbeta med flera representationsformer (grafiska, algebraiska, numeriska), samt använda diskussioner och elevsvar för att synliggöra och bearbeta fel. Slutsatsen är att elevernas missförstånd inte är slumpmässiga utan systematiska, och därför kräver medvetna pedagogiska strategier.

Teaching Structure in Algebra (Merlin, 2013) beskriver en metod för att öka elevers förståelse för strukturen i matematiska uttryck (såsom i vilken ordning operationer ska utföras, distribution och innebörden av parenteser etc.) som bygger på träddiagram.

Analys

För att analysera resultaten i föregående del lyfts först de begreppsliga skillnaderna mellan artiklarna fram under en egen rubrik, då författaren anser att synen på missförstånd influerar hur resultaten i respektive aritkel kan tolkas. Därefter hanteras var och en av de tre frågorna för sig.

Begreppet missförstånd

Användningen av begreppet missförstånd (eller "misconceptions", eftersom samtliga artiklar var på engelska) skiljer sig något mellan olika artiklar. I missförståndsforskning är missförstånd något kognitivt, som inte kan observeras direkt men som kommer till uttryck genom att elever systematiskt presenterar felaktiga lösningar av samma slag (Kurtuluş & Tatar, 2021). Denna definition delas uttryckligen av fem artiklar (Booth et al., 2014; Luneta & Makonye, 2010; Schnepper & McCoy, 2013; Tooher & Johnson, 2020). Schnepper & McCoy (2013) slarvade dock med definitionen i praktiken genom att använda fel och missförstånd synonymt.

Sex andra artiklar använder i praktiken begreppet på ett sätt som ungefär överensstämmer med definitionen, även om de inte uttryckligen definierar det (Makonye & Khanyile, 2015; Merlin, 2013; Soneira, C., 2022; Tunzana et al., 2025; Zielinski & Glazner, 2019). O'Connor (2022) kallar alla fel som begåtts missförstånd, vilket gör definitionen oklar. Hon resonerar dock i viss grad kring elevernas kognitiva modeller, vilket gör att delar av hennes resultat är relevanta även i en missförståndsforskningskontext.

Vanliga missförstånd

Även om en majoritet av artiklarna ger uttryck för att en del av dess syfte är att identifiera missförstånd, är det bara Booth et al. (2014), Luneta och Makonye (2010), Tooher och Johnson (2020) samt Tunzana et al. (2025) som faktiskt presenterar systematiska, felaktiga lösningar som en del av sina resultat.

Både Booth och Tooher har på förhand definierade missförståndskategorier som de letar efter (och i olika grad hittar) hos eleverna. Booth beskriver en rad missförstånd, som presenteras i tabell 1, och konstaterar att många missförstånd följer med eleverna från grundskolan. Tooher

beskriver sina tre missförstånd: ”reversal error”, där elever tror att samband mellan variabler uttrycks som en ratio, ”Letters as objects”, att variabler förväxlas med föremålen som de behandlar (“antal kakor” blir “kakor”), och problem med likhetstecknet av samma slag som dem Booth tar upp – intressant nog hittar dock Tooher mycket lite stöd för denna senare missuppfattning.

Error category	Specific errors
Variable	Combining unlike terms; moving, deleting, or adding a variable
	Solving for only one variable
Negative Sign	Moving, deleting, or adding a negative sign, including subtracting when addition is indicated or addition when subtraction is indicated.
	Moving a term without changing its sign
Equality/ Inequality	Moving, deleting, or adding an equals sign; performing operations without maintaining balance on both sides of the equals or inequality sign
	Changing/not changing the direction of the inequality sign when inappropriate
Operation	Performing addition or subtraction when multiplication or division is indicated, or vice versa.
Mathematical Property	Inappropriately applying the commutative or associative property
	Inappropriately applying the distributive property
Fraction	Moving a term from the numerator to the denominator or vice versa; performing multiplication when division is indicated by the fraction bar; using addition or subtraction to eliminate a numerator or denominator

Fig. 1. Vanliga missförstånd identifierade av Booth et. Al (2022).

I kontrast till dessa två artiklar söker inte Luneta och Makonye (2010) eller Tunzana et al. (2025) efter några specifika missförstånd, utan konstruerar kategorier utifrån elevernas resultat. Dessa kategorier blir mer generella än de Booth och Tooher använder, och rör mer vad för typ av tanke eleven haft än vad eleven tänkt. Mer specifikt identifierar författarna faktorisering, negativa tal, ekvationslösning och förenkling av potenser som områden där missförstånd förekommer i hög grad och som förhindrar eleverna från att tillgodogöra sig högre matematik.

Tunzana et al. (2025) fokuserar på trigonometriska funktioner, men upptäcker att missförstånd i grundläggande algebra ofta förhindrar eleverna från att tillgodogöra sig trigonometrin på ett korrekt sätt. Ett missförstånd de identifierar gäller addition och multiplikation med inverser under förenkling, en förlängning av missförstånd kring likhetstecknet. Inom trigonometrin fann de att de trignometriska funktionernas periodicitet var svårast att förstå, och många elever angav bara en lösning på trigonometriska funktioner när det fanns flera.

Tydligheten hos dessa fyra artiklar skiljer sig från artiklar som Schnepper och McCoys (2013), som tar upp exempel på missförstånd hos enstaka elever, men inte visar hur vanliga eller respresentativa dessa missförstånd är för gruppen som helhet, eller Soneiras (2022), som tar upp felaktiga lösningar, men lämnar åt läsaren att själv dra slutsatser om vilka missförstånd (om några) som ligger till grund för dem.

Vissa mönster kan ses i missförstånden mellan artiklarna. Missförstånd kopplade till likhetstecknet förekommer i Booth et al. (2014) och Tunzana et al. (2025), och antyds i Soneira (2022). Strukturella svårigheter (distribution, prioritetsregler, parenteser) nämns av Booth samt Schnepper och McCoy (2013), och adresseras explicit av Merlin (2013). Booth, Schnepper samt Luneta och Makonye (2010) ger alla exempel på elever som förenklar en av termerna i en summa som ingår i ett bråk, istället för hela täljaren eller nämnaren.

Sammanfattningsvis är det endast ett begränsat antal av de inkluderade studierna som presenterar missförstånd på ett systematiskt och jämförbart sätt. Skillnader i metodval, särskilt mellan studier som utgår från fördefinierade missförståndskategorier och studier som konstruerar kategorier utifrån elevlösningar, påverkar både graden av specificitet och möjligheten att jämföra resultaten. Trots detta framträder vissa återkommande mönster. Missförstånd kring likhetstecknets innebörd samt strukturella svårigheter vid algebraisk manipulation förekommer i flera artiklar, oberoende av matematiskt delområde. Dessa missförstånd tycks dessutom ofta ligga till grund för svårigheter i mer avancerade moment, såsom trigonometriska funktioner. Artiklarna ger därmed inte en fullständig kartläggning av algebraiska missförstånd, men pekar ut ett mindre antal centrala problemområden som återkommer i forskningen och som framstår som särskilt relevanta för vidare undersökning.

Identifikation av missförstånd i klassrummet

Ett sätt att försäkra sig om att rätt metod för remediering används är att först identifiera vilket missförstånd det är som ska redas ut. Detta kan göras på grupp- eller individnivå. Artiklarna presenterar flera sätt att identifiera missförstånd, där vissa utvärderar identifikationsmetodernas möjlighet att omsättas i klassrumspraktik (Schnepper & McCoy, 2013; Tunzana et al., 2025; Makonye & Khanyile, 2015; Zielinski & Glazner, 2019; Tooher & Johnson, 2020) medan andra bara använder identifikation som en del av sin forskningsmetod (Booth et al, 2014; Luneta & Makonye, 2010; O'Connor, 2022; Soneira, 2022; Gür, 2009). Den senare gruppen är inte nödvändigtvis ointressant – forskarnas identifikationsmetoder ger generellt väldigt grundliga svar, och kan ge fingervisningar om vad som behövs för att locka fram missförstånden – men metoderna kräver ofta ensamtid med elever för intervjuer eller fler tester än vad som är praktiskt genomförbart på en skola.

Flera studier pekar på att korta, riktade diagnostiska uppgifter är en praktiskt genomförbar metod för att identifiera missförstånd i vardaglig undervisning. Schnepper och McCoy (2013) visar att när samma fel upprepas över flera mindre prov eller quiz är detta en stark indikator på ett underliggande begreppsproblem snarare än tillfälliga slarvfel. Ett liknande arbetssätt används av Zielinski och Glazner (2019), vars så kallade *practice slips* gör det möjligt för läraren att snabbt upptäcka vilka specifika områden elever ännu inte behärskar. Gemensamt för dessa metoder är att de är tidsbesparande och kan integreras i ordinarie undervisningsmoment utan större organisatoriska hinder.

En annan identifieringsmetod med tydlig klassrumsanknytning är den Makonye och Khanyile (2015) kallar *probing*. Den bygger på att läraren ställer strukturerade följdfrågor till en elevs lösning, till exempel genom att be eleven motivera ett beräkningssteg eller pröva sitt resonemang med ett nytt värde. Genom att fokusera på elevens tankekedja snarare än på svaret i sig kan läraren avgöra om felet beror på en alternativ begreppsmodell eller en bristande färdighet i procedur. Metoden kräver varken särskilt material eller extra lektionstid, och den kan användas spontant i interaktioner under lektionens gång.

En tredje metod som lyfts i litteraturen bygger på uppgiftsdesign. Både Booth et al. (2014) och Tooher och Johnson (2020) använder uppgifter som medvetet konstruerats för att trigga specifika missförstånd, såsom *reversal error* eller problem med likhetstecknet. När elevernas lösningar följer förutsägbara felmönster kan läraren dra slutsatsen att dessa missförstånd förekommer i gruppen. Denna strategi kräver viss planering, men är genomförbar i vanlig undervisning, till exempel genom exit tickets eller som enstaka frågor i arbetsblad.

De metoder som används i mer forskningsinriktade studier – såsom djupintervjuer (Luneta & Makonye, 2010; O'Connor, 2022) eller omfattande diagnostiska prov (Gür, 2009) – bidrar med värdefulla insikter om elevernas tänkande, men deras omfattning gör dem mindre lämpade för kontinuerlig användning i skolan. De kan därför ses som inspirationskällor snarare än praktiska verktyg för lärare.

Identifieringsmetoderna med störst potential i en klassrumskontext verkar alltså vara tre: korta diagnostiska uppgifter som återkommer över tid, strukturerade följdfrågor som fokuserar på elevens resonemang, och uppgifter som avsiktligt är utformade för att framkalla typiska missförstånd. Dessa metoder kräver begränsad tid, kan integreras i ordinarie undervisning och har stöd i forskningen, vilket gör dem lämpliga för lärare som vill arbeta systematiskt med att upptäcka och förstå elevernas missförstånd i algebra.

Remediering av missförstånd

Flera artiklar intresserar sig för metoder för remediering. Makonye och Khanyile (2015), Schnepper och McCoy (2013), Tooher och Johnson (2020), Tunzana et al. (2025) samt Zielinski och Glazner (2019) presenterar alla undervisningsmetoder som utgår ifrån att identifiera missförstånd i klassen och utforma undervisningen utifrån dem. Endast Tooher och Johnsons metod verkar måttligt framgångsrik, där övriga studier redovisar förbättringar som sträcker sig från stora till enorma. Metoderna uppvisar också stor diversitet: Makonye och Khanyiles (2015) probing kombinerar identifikation och remediering, då frågorna de ställer är tänkta att leda eleven till att själv se vad som gått fel; Schnepper och McCoy (2013) kombinerar missförstånd med formativ bedömning; och Tooher och Johnson tittar på anchoring, en scaffolding-teknik som försöker eliminera de faktorer i matematiska uppgifter som lockar fram missförstånden.

En likhet mellan Toohers anchoring och Makonyes probing är att de förlitar sig på elevens förmåga att (med stöd från läraren) själv forma en korrekt matematisk uppfattning, snarare än att läraren uttryckligen förklarar hur eleven ska tänka. Båda metoderna syftar därmed till att utlösa en form av begreppslig konflikt hos eleven – antingen genom att en förenklad representativ situation gör det svårare att upprätthålla det felaktiga tankesättet, eller genom att eleverna själva, via lärarens frågor, identifierar brister i sitt eget resonemang.

Trots denna gemensamma utgångspunkt skiljer sig metoderna åt i hur elevens omprövning initieras. Anchoring bygger på uppgiftsdesign och verkar således framför allt på gruppnivå, medan probing är beroende av direkt interaktion och kan anpassas till individuella resonemang. I resultaten från respektive studie framgår att båda metoderna kan leda till korrigering av specifika missförstånd, men att de aktiverar olika delar av elevens kognitiva processer: anchoring genom att styra elevens uppmärksamhet mot en mer stabil representation av problemet, och probing genom att explicit synliggöra det egna resonemangets inre struktur. Tillsammans illustrerar metoderna två närliggande men distinkt operationaliserade sätt att arbeta med elevens begreppsbildning utan direkt instruerande förklaringar.

Flera av studierna konstaterar att missförstånden lever vidare i kontrollgrupper där inga särskilda interventioner genomförs, och sluter sig till att undervisningen eleverna erbjuds i vanliga fall är otillräcklig för remediering. Booth et al. (2014) utmärker sig genom att undersöka denna utveckling över en längre tid, och konstaterar då tvärtom att de matematiska missförstånden i deras klass förändras över tid. De kan visa att många missförstånd remedieras efter ett tag även med det författarna kallar typisk undervisning medan andra, mer seglivade missförstånd blir ett växande problem i takt med att någon matematisk förståelse blir mer central i arbetet. Författarna sluter sig därför till att interventionerna bör rikta sig mot de missförstånd som den vanliga undervisningen inte biter på, men som har god potential att remedieras med en särskild intervention. Baserat på dess resistens mot standardundervisning, dess centrala roll i högre matematik och mängden av goda remedieringsmöjligheter som visats i annan litteratur rekommenderar de därför att särskild vikt läggs vid missförstånd kring likhetstecknet.

Diskussion

Metodologi

Den systematiska sökningen var inte felfri. Just bristen på likriktning inom området missförståndsforskning kan göra att olika termer används för väldigt liknande forskning, termer som kan göra att artiklar faller bort. “Student conceptions” är exempelvis en term för alternativa kognitiva modeller som inte inkluderades i sökningen, då den vid tillfället var okänd för författaren. Ett känsligt steg var när sökningen snävades av efter det första försöket - kanske gick många värdefulla källor förlorade när resultaten begränsades till de som liknade artiklarna som redan hittats.

Hade fler artiklar med ett större fokus på att kartlägga missförstånd upptäckts hade kanske det här arbetet kunnat bidra med en mer heltäckande beskrivning av kunskapsläget. Det framstår dock som osannolikt att dessa artiklar hade varit mer begreppsligt koherenta än de som inkluderats här om de använder andra begrepp för att beskriva sin forskning.

En annan brist är avsaknaden av svenska källor. Frågeställningen inriktar sig på gymnasieelever, vilket är en svensk företeelse. För att kompensera används artiklar som intresserar sig för samma åldersgrupp och stoff, men det är ingen garanti för att svenska elever möterde problem som beskrivs här.

Slutsatser

Forskningen på matematiska missförstånd är spretig. Artiklarna i det här arbetet använder inte samma metodologi, kategoriserar inte missförstånden på samma sätt, och lyckas inte ens konsekvent använda samma definition av missförstånd (Booth et al., 2014; Luneta & Makonye, 2010; Schnepper & McCoy, 2013; O’Connor, 2022 etc.). Denna skillnad i begreppet kan vara förklaringen till att att fokuset i studierna varierar mellan att försöka utröna vilka föreställningar eleverna har och att sammanställa vilka fel de gör.

Spretigheten gör artiklarna svåra att sammanställa. Även om Booth et al. (2014), Luneta och Makonye (2010), Tooher och Johnson (2020) och Tunzana et al. (2025) gör sina respektive

nedslag i materialet står en uttömmande och specifik lista över de missförstånd som elever formulerar i algebran inte att finna här – trots årtionden av forskning på ett fenomen som verkar ha varit ganska stabilt de senaste hundra åren (Merlin, 2013; O'Connor, 2022; Zielinski & Glazner, 2019). Det kan antas att om man inte kan identifiera specifika missförstånd kan man inte heller uttala sig om vilken specifik metod som bäst remedierar den, vilket kan vara en förklaring till att artiklarna hänfaller åt mer generella uttalanden, som att en viss metod får testresultaten att gå upp (Makonye & Khanyile, 2015; Schnepper & McCoy, 2013; Tooher & Johnson, 2020; Tunzana et al., 2025; Zielinski & Glazner, 2019).

Flera av identifieringsmetoderna framstår som intressanta för att de synliggör den begreppsliga strukturen bakom elevens resonemang. Korta diagnostiska uppgifter som de Schnepper och McCoy (2013) och Zielinski och Glazner (2019) beskriver fångar vilka fel som återkommer, men säger inte alltid något om varför de uppstår. Metoder som probing (Makonye & Khanyile, 2015) och anchoring (Tooher & Johnson, 2020), däremot, tvingar fram elevens underliggande antaganden och gör det möjligt att urskilja om ett fel är procedurmässigt eller konceptuellt. Detta ligger nära den bild av missförstånd som litteraturen tecknar: de är inte slumpmässiga fel, utan uttryck för koherenta men felaktiga modeller (Confrey, 1990; Kurtuluş & Tatar, 2021). För att kunna bemöta dem räcker det därför inte att presentera en korrekt procedur – undervisningen måste på något sätt ge eleven möjlighet att upptäcka att den egna modellen inte håller. Det kan förklara varför dessa mer interaktiva eller strukturerande identifieringsmetoder framstår som särskilt effektiva i artiklarna (Makonye & Khanyile, 2015; Schnepper & McCoy, 2013; Tooher & Johnson, 2020; Tunzana et al., 2025; Zielinski & Glazner, 2019).

Intressant är att gymnasielärare måste räkna med att många av eleverna redan från första dagen kliver in i klassrummet med missförstånd kring högstadiematematiken, samtidigt som nya missförstånd av allt att döma kommer att uppstå under hela deras studietid (Booth et al., 2014; Gür, 2009). Det finns alltså anledning att låta identifikation genomsyra lärargärningen och klassrumsrutinen från den första dagen till den sista.

Gemensamt för remedieringsstrategierna som presenteras i artiklarna är att de är generella (alltså inte utformade för att rätta till något eller några specifika missförstånd, utan alla) och nästan uteslutande väldigt effektiva, om man får tro resultaten (Makonye & Khanyile, 2015; Schnepper & McCoy, 2013; Tooher & Johnson, 2020; Tunzana et al., 2025; Zielinski & Glazner, 2019). Det finns kanske anledning att vara skeptisk till dessa, dels av metodologiska skäl som begränsat

underlag och avsaknad av kontrollgrupper, dels för att de använder metoder utan att förklara hur de ska integreras i en skolvardag begränsad i tid och resurser. Sammantaget finns det dock anledning att undra om missförståndsspecifika remedieringar har så mycket mer att erbjuda, en fråga som bara kan besvaras genom forskning på sådana metoder.

De undervisningsnära implikationerna av resultaten är på samma gång lovande och utmanande. Metoder som probing (Makonye & Khanyile, 2015) och korta diagnostiska uppgifter (Schnepper & McCoy, 2013; Zielinski & Glazner, 2019) är enkla att implementera och kräver inte omfattande material eller omstrukturering av lektioner. Samtidigt ställer de höga krav på lärarens förmåga att tolka elevens resonemang i realtid och att snabbt avgöra vilket missförstånd som ligger bakom ett visst fel. Det är också möjligt att vissa strategier fungerar bättre i grupper där eleverna redan har en stabil grundkompetens, medan andra är mer effektiva i heterogena klasser. Detta blir särskilt relevant i en svensk kontext, där lärare ofta undervisar klasser med stort spann i tidigare erfarenheter. Resultaten tyder därför på att en effektiv undervisning om missförstånd inte bara kräver kunskap om vilka missförstånd som är vanliga, utan också en medvetenhet om hur olika identifierings- och remedieringsmetoder kan kombineras och anpassas efter elevgruppen.

För att sammanfatta visar litteraturen att forskningen om algebraiska missförstånd rör sig i flera olika riktningar samtidigt: den kartlägger feltyper, utvecklar metoder för att identifiera dem och föreslår strategier för att övervinna dem. Den erbjuder dock än så länge inte en sammanhängande modell som lärare kan använda som verktyg i vardagsarbetet. Om inte missförstånden klassificeras och presenteras för lärare framstår det som rimligt att deras kapacitet att känna igen dem blir sämre, något som är ett krav för samtliga av de beskrivna identifikationsmetoderna (Schnepper & McCoy, 2013; Zielinski & Glazner, 2019; Makonye & Khanyile, 2015; Tooher & Johnson, 2020), som i sin tur är nödvändiga för effektiv remediering. Att det finns bristande kunskap om de vanligaste missförstånden innebär alltså en risk för att det Kurtuluş och Tatar (2021) skriver om missförståndens långa liv blir praktisk verklighet i den svenska skolan.

Trots att majoriteten av studierna i denna litteraturgenomgång är genomförda i andra länder, framför allt USA och Sydafrika, framstår deras resultat som relevanta för en svensk kontext. De missförstånd som identifieras – exempelvis kring variabler, likhetstecknet och algebraiska strukturer – rör fundamentala begrepp som är centrala också i den svenska kursplanen för Matematik 1 (Skolverket, 2025b). Eftersom algebra utgör en globalt likartad disciplin, där

progressionen från aritmetik till symbolmanipulation följer snarlika mönster, är det rimligt att anta att många av de svårigheter som beskrivs också uppträder hos svenska gymnasieelever. Samtidigt skiljer sig undervisningstraditioner, kursplanestrukturer och elevgrupper åt, vilket innebär att resultaten inte kan överföras utan vidare. De identifierings- och remedieringsmetoder som framstår som effektiva i forskningen behöver därför prövas och anpassas inom svenska klassrum för att utvärdera deras faktiska användbarhet.

Om missförståndsforskning ska kunna forma vår undervisning krävs alltså vidare forskning, både för att fylla de stora kunskapsluckor om själva missförstånden som uppenbarligen finns och för att ge oss en bättre bild av de metoder för identfiering och remediering som passar bäst i en svensk kontext. Därför rekommenderar författaren till denna text att följande frågor undersöks i vidare studier:

a) Vilka algebraiska missförstånd är vanligast bland svenska gymnasieelever som läser Matematik 1?
b) I vilken utsträckning kan undervisningsnära identifieringsmetoder, såsom korta diagnostiska uppgifter och probing, bidra till att synliggöra dem?

Fråga a) skulle förslagsvis kunna besvaras genom att genomföra skriftliga tester utformade för att locka fram missförstånd i en eller ett par gymnasieklasser, följt av intervjuer där eleverna får redogöra för sina tankegångar.

Fråga b) kräver att identifieringsmetodernas effektivitet utvärderas, vilket är mer komplext. En potentiell metod är som följer: Skriftliga tester genomförs för att upptäcka potentiella missförstånd. Därefter får lärare som har instruerats i identifieringsmetodernas utövande applicera dem på eleverna i klassrummet och försöka upptäcka missförstånden. Lärarna intervjuas, och deras upptäckter nedtecknas. Sedan genomförs intervjuer med eleverna för att bekräfta var i testen som missförstånd föreligger, och dessa resultat jämförs med lärarnas upptäckter.

Referenser

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem Solving*, 7(1).

Confrey, J. (1990). Chapter 1: A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. *Review of Research in Education*, *16*(1), 3-56.

Duit, R. (2009). *Student's and teacher's conceptions and science education.* https://archiv.leibniz-ipn.de/stcse/

Gür, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67–80.

Kurtuluş, M. A., & Tatar, N. (2021) An Analysis of Scientific Articles on Science Misconceptions: A Bibliometric Research. *Ilkogretim Online*, 20(1), 192-207.

Luneta, K., & Makonye, P. J. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, *3*(3), 35–46.

Reid O'Connor, B. (2022). Improving Student Proficiency in Solving Quadratic Equations. *Australian Mathematics Education Journal*, 4(2), 29–38.

Makonye, J. P., & Khanyile, D. W. (2015). Probing Grade 10 Students about Their Mathematical Errors on Simplifying Algebraic Fractions. *Research in Education*, 94(1), 55–70.

Merlin, E. M. (2013). Teaching Structure in Algebra. *Mathematics Teacher*, 107(4), 292–297.
Moeketsi Mosia, Mogalatjane Edward Matabane, & Tshele John Moloi. (2023). Errors and Misconceptions in Euclidean Geometry Problem Solving Questions: The Case of Grade 12 Learners. *Research in Social Sciences and Technology*, 8(3), 89–104.

Schnepper, L. C., & McCoy, L. P. (2013). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research,* 15(1).

Skolverket, (2025a). *Läroplan (Lgy25) för gymnasieskolan*. Läroplan (Gy25) för gymnasieskolan - Skolverket

Skolverket, (2025b). *Ämne - Matematik*. Ämne - Matematik - Skolverket

Soneira, C. (2022). The Use of Representations When Solving Algebra Word Problems and the Sources of Solution Errors. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(5), 1037–1056.

Tooher, H., & Johnson, P. (2020). The Role of Analogies and Anchors in Addressing Students' Misconceptions with Algebraic Equations. *Issues in Educational Research,* 30(2), 756–781.

Tunzana, V., Mukuka, A., & Tatira, B. (2025). Exploring Grade 11 Learners' Understanding of Trigonometric Equations: An Evaluation of a Remedial Teaching Intervention. *Mathematics Teaching Research Journal*, 17(2), 80–103

Veith, J. M., Beste, M.-L., Kindervater, M., Krause, M., Straulino, M., Greinert, F., & Bitzenbauer, P. (2023). Mathematics education research on algebra over the last two decades: Quo vadis? *Frontiers in Education*, 8.

Zielinski, S. F., & Glazner, M. (2019). The No-to-Yes Project: Conquering Common Algebraic Mistakes That Drive Us and Our Students Crazy. *Mathematics Teacher*, 112(6), 432–438.

Bilaga A

Tabell A. Samtliga sökningar presenteras här i den ordning som de utfördes. Under ”filter” används förkortningarför att visa vilka automatiska filtreringar som har gjorts – PR står för Peer-Reviewed, SE för utbildningsnivån Secondary Education, AkTi för akademisk tidskrift.

Sökord	Filter	Databas	Datum	Resultat
(misconception* or "error pattern*" or "error analysis") AND math* AND (upper secondary school or high school or upper secondary education)	eng, PR	ERC	3/9	181
	eng, PR, SE	ERIC	3/9	401
algebra AND (misconception* or "error pattern*" or "error analysis") AND math* AND (upper secondary school or high school or upper secondary education)	eng, PR	ERC	3/9	21
	eng, PR, SE	ERIC	3/9	87
Learning Problems AND Mathematics Education AND (Misconception* or "Error patterns*") AND Intervention AND Mathematical Concepts AND Cognitive Development AND ("secondary education" or "high school" or "grade 10" or "grade 11" or "grade 12")	eng, PR	ERC	3/9	0
	eng, PR, SE	ERIC	3/9	1
(misconception* or "error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or "Secondary Education")	eng, PR, SE	ERIC	4/9	487
misconception* AND ("error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or	eng, PR	ERC	4/9	3

"Secondary Education")				
misconception* AND ("error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or "Secondary Education")	eng, PR, SE	ERIC	4/9	47
(misconception* AND ("error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or "Secondary Education")) NOT TI (Geometry) NOT SU (Geometry) NOT ("grade 9" or "grade 8" or "grade 7" or "postsecondary education" or "year 7")	eng, PR, SE, AkTi	ERIC	4/9	20
(misconception* AND ("error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or "Secondary Education")) NOT TI (Geometry) NOT SU (Geometry) NOT ("grade 9" or "grade 8" or "grade 7" or "postsecondary education" or "year 7")	eng, PR	ERC	4/9	1
(misconception* AND ("error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or "Secondary Education")) NOT TI	eng, PR, SE, AkTi	ERIC	4/9	13

(Geometry) NOT SU (Geometry) NOT ("grade 9" or "grade 8" or "grade 7" or "postsecondary education" or "year 7" or "middle school")				
missförstånd AND matematik	AkTi	SwePub	4/9	1
missuppfattning AND matematik	AkTi	SwePub	4/9	1
misconception* AND ("error analysis" or "error pattern*") AND ("mathematics education" or "mathematics instruction" or "mathematics achievement" or "mathematics teacher*") AND ("Secondary School" or "High School" or "grade 11" or "grade 10" or "grade 12" or "Secondary Education").	eng, PR	ERC	5/9	3
	AkTi	SwePub	5/9	0
	eng, PR, SE, AkTi	ERIC	5/9	41