



NMS – NATURVETENSKAP,
MATEMATIK OCH SAMHÄLLE

Examensarbete i fördjupningsämnet matematik och lärande

15 högskolepoäng, avancerad nivå

Mellanstadielärares användning av matematiska representationsformer

Middle School Teachers' Use of Mathematical Representations

Linn Grevstig
Linnea Liljedahl

Grundlärarexamen med inriktning
mot arbete i årskurs 4-6, 240 hp
Datum för slutseminarium 2024-03-24

Examinator: Anna Wernberg
Handledare: Nils Ekelund

Förord

Denna studie har genomförts inom kursen Examensarbete i fördjupningsämnet matematik och lärande, på avancerad nivå, vid Malmö universitets grundlärarutbildning årskurs 4-6. Samtliga delar i arbetet har genomförts och författats tillsammans, vilket medför att båda parter har bidragit likvärdigt till studiens utformning.

Vi vill framförallt tacka vår handledare Nils Ekelund för tydlig och hjälpsam vägledning. Vi vill även tacka lärarna som deltog i studien och bidrog med insiktsfull kunskap.

Linn Grevstig och Linnea Liljedahl

Malmö 2025-03-25

Abstrakt

Trots att det går att utläsa en förbättring av elevers matematikkunskaper i Sverige, kvarstår problemet att matematik är det skolämne där flest elever inte når godkänd nivå. För att vidare driva på den positiva utvecklingen av elevers matematikkunskaper bör vetenskapligt underbyggda undervisningsmetoder användas. Tidigare forskning har påvisat att matematiska representationsformer är en pedagogisk strategi som gynnar elevers lärande i matematik. Denna studie syftar till att undersöka hur mellanstadielärare använder matematiska representationsformer och hur det påverkar elevers lärande, men även sammanställa vilka förutsättningar som krävs för att det ska vara möjligt att använda i undervisningen. Studien utgår från fem kvalitativa, semistrukturerade intervjuer med verksamma matematiklärare på mellanstadiet. En teoretisk tematisk analys har använts för att tematisera studiens insamlade data utifrån frågeställningarna. Resultatet analyseras, förstås och diskuteras kontinuerligt utifrån Schulmans teoretiska ramverk pedagogical content knowledge (PCK). Resultatet visar och slutsatserna understryker att matematiska representationsformer används som ett lärverktyg som är gynnsamt för alla elevers lärande, under förutsättning att lärare är medvetna om samt kan hantera dess möjligheter och svårigheter. Vidare visar resultatet och slutsatserna understryker att inre och yttre ramfaktorer påverkar lärares användning av matematiska representationsformer.

Nyckelord: elevers lärande, matematiska representationsformer, mellanstadielärare, pedagogical content knowledge (PCK), ramfaktorer.

Innehållsförteckning

1. Inledning	6
2. Syfte och frågeställningar	8
3. Teoretiskt perspektiv	9
3.1 Pedagogical content knowledge	9
4. Tidigare forskning	11
4.1 Matematiska representationsformer utifrån ett elevcentrerat perspektiv	11
4.2 Matematiska representationsformer utifrån ett lärarcentrerat perspektiv.....	12
4.3 Lärares utveckling av PCK	14
5. Metod	15
5.1 Forskningsdesign	15
5.2 Datainsamling	16
5.3 Dataanalys	17
5.4 Forskningsetiska övervägande	19
5.5 Reliabilitet och validitet	19
6. Resultat och analys	21
6.1 Mellanstadielärares användning av representationsformer i matematikundervisning ..	21
6.1.1 Lärares tolkning och erfarenhet av representationsformer	21
6.1.2 Hur och när representationsformer används i undervisningen	22
6.2 Mellanstadielärares uppfattning av hur matematiska representationsformer påverkar elevers lärande i matematik	24
6.3 Förutsättningar för att kunna bedriva undervisning med matematiska representationsformer	28
6.3.1 Yttre ramfaktorer	28
6.3.2 Inre ramfaktor	32
7. Slutsats och diskussion	34
7.1 Slutsatser	34
7.2 Resultatdiskussion	35
7.3 Studiens bidrag till yrkesprofessionen	38

7.4 Metoddiskussion	39
7.5 Vidare forskning	41
8. Referenser	42
9. Bilagor	46
9.1 Bilaga 1	46
9.2 Bilaga 2	48

1. Inledning

Matematik är ett samhällsviktigt skolämne, men det är samtidigt det ämne i svenska skolan där flest elever inte når godkända resultat utifrån betygs- och bedömningskriterierna (Regeringskansliet, 2024). Elevers matematikresultat har varit låga i internationella mätningar under en längre tid, men de senaste resultaten från Trends in International Mathematics and Science Study 2023 visar att den negativa trenden bryts av en viss uppgång i matematikresultat. Samtidigt kvarstår stora kunskapsklyftor mellan elevgrupper (Skolverket, 2024). För att vidare driva på utvecklingen i en positiv riktning samt minska kunskapsklyftorna mellan elevgrupper bör, enligt skolminister Lotta Edholm, svensk skolverksamhet inriktas på vetenskapligt underbyggda undervisningsmetoder (Utbildningsdepartementet, 2024).

Användning av *matematiska representationsformer* i undervisning är en metod som är vetenskapligt underbyggd samt har visats vara gynnsam för elevers lärande (Johnson, O'Meara, & Leavy, 2020; Sokolowski, 2018; Stylianou, 2011). Matematiskt innehåll kan åskådliggöras och representeras med hjälp av representationsformer (Helenius, Rystedt, & Trygg, 2021) och i matematikämnet finns en variation av dessa att tillgå såsom symboler, föremål, bilder och ord (McIntosh, 2008). I denna studie benämns symboler som *symbolisk representationsform*, vilken innefattar siffror och bokstäver. Denna representationsform definieras som formell matematik (Stylianou, 2010). Vidare benämns föremål som *konkret representationsform* och innefattar användningen av olika fysiska material. Bilder benämns som *visuell representationsform*, vilken innefattar skapandet och användandet av visuella uttrycksformer. Det kan exempelvis vara diagram, graf, tabell eller bild. I denna studie kommer kategorin ord inte att behandlas, eftersom det inte har varit centralt under studiens genomförande.

Den svenska skolans styrdokument redogör för vad som ska inkluderas i undervisningen och varför, men de redogör inte för hur lärare ska bedriva sin undervisning för att förmedla ämnesinnehållet. Läroplanen redogör däremot för att undervisning ska differentieras för att tillgodose alla elevers förutsättningar för lärande (Skolverket, 2022, s. 6). Att använda varierade representationsformer är ett sätt att differentiera matematikundervisning (Hurst & Linsell, 2020; Stylianou, 2010). Fortsättningsvis framgår det i kursplanen för matematik att elever ska få arbeta med och utveckla sin förmåga att använda olika matematiska

uttrycksformer (Skolverket, 2022, s. 54-64). En uttrycksform är ett sätt att uttrycka representationer av matematik och kan till viss del användas synonymt med en representationsform (Helenius et al., 2021). Dessa utdrag, från den svenska läroplanen och tidigare forskning, belyser därmed vikten av att lärare använder representationsformer i matematikundervisning.

Kombinationen av vår tid på lärarutbildningen och vår yrkeserfarenhet som obehöriga lärare har resulterat i ett intresse för matematiska representationsformer. Vi har däremot noterat att lärare använder varierande representationsformer i olika stor utsträckning, eller inte alls, trots att forskning visar att det gynnar elevers lärande. Vårt intresse väcktes därmed för att undersöka hur och varför lärare använder representationsformer i sin matematikundervisning samt om det finns ramfaktorer som påverkar denna användning. Ramfaktorer är de förutsättningar som lärare bedriver sin undervisning utifrån, samt de förutsättningar som är svåra för lärare att påverka (Lindström & Pennlert, 2019).

I utformningen av denna studie har bristen på forskning i en svensk kontext likväl bristen på forskning om mellanstadielärares perspektiv, i förhållande till matematiska representationsformer, kunnat konstateras. Fokus i denna studie landade därför på mellanstadielärare i en svensk kontext. Studien är relevant för yrkesprofessionen eftersom den ämnar öka förståelsen för hur och utifrån vilka förutsättningar representationsformer kan användas. Både verksamma och blivande lärare kan därmed utveckla sin förståelse för hur matematiskt ämnesinnehåll kan förmedlas med hjälp av denna pedagogiska strategi. Studien är även relevant för matematikdidaktik, eftersom den syftar till att belysa lärares uppfattning om hur användning av representationsformer gynnar elevers lärande.

2. Syfte och frågeställningar

Utifrån ovanstående bakgrund ämnar denna studie till att undersöka och sammanställa verksamma mellanstadielärares användning av matematiska representationsformer, i förhållande till elevers lärande och den svenska läroplanen. Svenska skolans styrdokument redogör för vad lärare ska inkludera i sin undervisning samt varför, men inte för hur undervisningen ska genomföras (Skolverket, 2022, s. 54-64). I detta avseende erbjuder läroplanen ett tolkningsutrymme för lärare. Syftet med denna studie är att underlätta en didaktisk tolkning av rådande styrdokument genom att öka förståelsen för hur mellanstadielärare använder matematiska representationsformer och hur det påverkar elevers lärande, men även sammanställa vilka förutsättningar som krävs för att det ska vara möjligt att använda i undervisningen.

Utifrån syftet formulerades följande frågeställningar:

- Hur använder mellanstadielärare representationsformer i sin matematikundervisning?
- Hur uppfattar mellanstadielärare att matematiska representationsformer påverkar elevers lärande i matematik?
- Vilka förutsättningar anser mellanstadielärare att det behövs för att kunna bedriva undervisning med matematiska representationsformer?

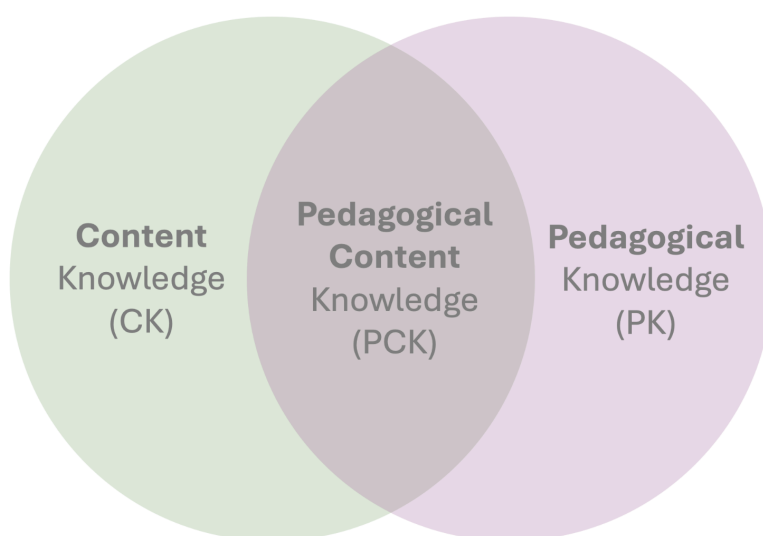
3. Teoretiskt perspektiv

I detta kapitel förklaras det teoretiska ramverket PCK. Följande teoretiskt ramverk möjliggör, i enlighet med studiens syfte, att analysera och tolka lärarnas ämneskunskaper, pedagogiska kunskaper samt hur kombinationen av dessa utspelar sig i deras undervisning.

3.1 Pedagogical content knowledge

Schulman (1986) myntade begreppet *pedagogical content knowledge* (PCK) med syftet att skapa ett koherent teoretiskt ramverk gällande hur ämneskunskap och pedagogisk kunskap samverkar i undervisning. Forskning om lärares val och motivering av tillvägagångssätt i undervisning ansåg Schulman (1986) var begränsad, vilket genererade reflektioner kring lärares kunskap om ämnesinnehåll och deras kunskap om att lära ut. Reflektionerna resulterade i att kombinationen av ämneskunskap och pedagogisk kunskap är nödvändig för undervisning och lärande (Schulman, 1986).

Content knowledge (CK) innebär ämneskunskap. Lärare behöver tillräcklig kunskap i ämnet som de undervisar i, för att kunna lära ut innehållet. *Pedagogical knowledge* (PK) innebär pedagogisk kunskap. Lärare behöver kunskap om pedagogiska metoder och tillvägagångssätt, för att kunna få andra att förstå ämnesinnehållet. Avsaknad av någon av dessa kunskaper resulterar i att lärare inte undervisar effektivt och meningsfullt (Schulman, 1987). I enlighet med vad figur 1 visar, resulterar kombinationen av CK och PK i PCK (Schulman, 1986).



Figur 1: Egen visuell tolkning av PK, CK och PCK utifrån Schulman (1986 & 1987).

PCK är intressant i undervisningssammanhang eftersom det förenar ämnesinnehåll och pedagogik för att möjliggöra för lärare att elever kan ta till sig ämneskunskap. Lärare som utvecklar PCK medför att lärarprofessionen skiljer sig från ämnesexperter, eftersom lärare både förstår sitt ämne och vet hur det ska förmedlas till elever på sätt som de förstår. Kunskap behöver därmed förmedlas genom pedagogiskt anpassade och effektiva metoder, utifrån elevers förkunskaper, förmågor och förutsättningar (Schulman, 1987). Vad lärare inkluderar i undervisningen samt hur det framförs måste vila på en medveten grund (Schulman, 1986). Denna medvetna grund bygger på, hos lärare som har utvecklat PCK, att CK och PK samverkar i lärares tankeprocesser (Schulman, 1987).

Det existerar en kunskapsbas för lärande, men den är dock svårförstådd eftersom lärare har svårt att uttrycka vad de vet och hur de vet det (Schulman, 1987). Skolverket (2012) menar att kunskapsbasen är en form av tyst kunskap, eftersom den baseras på lärares "erfarenhet, intuition och känsla" (s. 40). Det teoretiska ramverket PCK kan vara ett verktyg som underlättar kommunikationen av den tysta kunskap som lärare besitter (Skolverket, 2012).

En del av kunskapsbasen, som möjliggör att lärare kan förmedla sin kunskap till eleverna, är att representera ämnesinnehåll på olika sätt (Schulman, 1987). Lärare som utvecklar PCK, utvecklar även olika sätt att förmedla ämnesinnehåll på. Att använda flertalet representationer är en eftersträvarvärd pedagogisk strategi. Det innebär exempelvis att "(...) talking, showing, enacting, or otherwise representing (...)" varierar förmedlingen av ämnesinnehållet, för att bygga en bro mellan kunskaper som lärare besitter samt utvecklingen av elevers kunskaper och förståelse (Schulman, 1987, s. 7).

4. Tidigare forskning

I följande kapitel presenteras relevanta studier utifrån det aktuella forskningsfältet. Studierna har valts i förhållande till vårt syfte och våra frågeställningar. De har organiserats i tre underrubriker för att synliggöra matematiska representationsformer utifrån ett elevcentrerat såväl som ett lärarcentrerat perspektiv samt för att redogöra hur lärare kan utveckla PCK. Följande studier utgår från flera nationer, men studierna utgår generellt från elever i åldrarna motsvarande den svenska mellanstadieåldern. Sökningarna efter tidigare forskning har synliggjort en avsaknad av svensk forskning inom forskningsfältet.

4.1 Matematiska representationsformer utifrån ett elevcentrerat perspektiv

Utifrån en översikt av rådande forskningsfält gällande matematiska representationsformer framgår det att tidigare forskning till stor del utgår från ett elevcentrerat perspektiv med fokus på hur representationsformer påverkar deras matematiska förståelse. Tidigare forskning tyder generellt på att användning av representationsformer stöttar, gynnar och fördjupar elevers matematiska förståelse (Johnson et al., 2020; Sokolowski, 2018; Stylianou, 2011) samt förbättrar deras resultat (Amo-Asante & Bonyah, 2023). Nasrun, Sa'dijah, As'ari, & Susanto (2021) framför att elevers användning av representationsformer medför att de kan generera, förtydliga och utvärdera matematiska idéer, vilket är viktigt för deras kritiska tänkande, matematiska förståelse samt problemlösningsförmåga. Vid användning av flera representationsformer får elever möta matematik på olika sätt. Kombinationen av dessa utvecklar en vidgad och kompletterad inre bild av matematik hos elever (Nasrun et al., 2021; Sokolowski, 2018).

Hurst och Linsell (2020) betonar att användning av representationsformer inte är en mirakulös lösning för att stötta, gynna och fördjupa elevers matematiska förståelse. Det är därför nödvändigt att låta elever träna på att arbeta med representationsformer samt reflektera över sin användning av dem (Hurst & Linsell, 2020; Sokolowski, 2018). Om lärare inte ger elever förutsättningar för att förstå och använda representationsformer, blir de inte ett gynnsamt verktyg för lärande. I sådant fall använder elever representationsformer utan att förstå dem, vilket inte leder till bättre förståelse eller resultat (Puchner, Taylor, O'Donnell, & Fick, 2008; Stylianou, 2011).

Även om tidigare forskning indikerar att elevers matematiska förståelse främjas av representationsformer, oavsett ålder, visar den även att den praktiska användningen ser annorlunda ut. Utmärkande är att ju äldre elever är, i desto mindre utsträckning får de möta och använda andra representationsformer än den symboliska (Johnson et al., 2020; Hurst & Linsell, 2020). Trots det uppmanar aktuell forskning att varierande representationsformer bör användas mer genomgående i grundskolan (Nasrun et al., 2021).

4.2 Matematiska representationsformer utifrån ett lärarcentrerat perspektiv

Lärare har svårt att definiera vad representationsformer är samt vad målet med dess användning är, vilket resulterar i att det används som ett enskilt mål och inte som ett verktyg för lärande (Stylianou, 2010). Puchner et al. (2008) forskning överensstämmer med detta och visar att representationsformer blev ett mål i sig och inte ett lärverktyg för att elever ska förstå matematik och lösa matematiska problem. Stylianou (2010) konstaterade dessutom att lärare främst lägger fokus och tyngdpunkt på den symboliska representationsformen. Trots att representationsformer inte alltid används i den utsträckning som förespråkas, anser lärare att det finns flera fördelar med användningen (Stylianou, 2010).

En fördel med att arbeta med olika representationsformer är att elever blir mer aktiva och delaktiga i undervisningen. Det möjliggör för elever att fysiskt, visuellt och/eller verbalt kommunicera matematik (Polly, 2015). Representationsformer fungerar därmed som ett kommunikationsverktyg för elevernas eget lärande, lärandet eleverna sinsemellan samt mellan lärare och elever (Stylianou, 2010). Hurst och Linsell (2020) betonar, utifrån arbetet med konkreta representationsformer, att dialog är viktigt för lärande. Elever som använder olika representationsformer kommunicerar dessutom matematiskt i större utsträckning än elever som inte möter eller använder olika representationsformer (Polly, 2015).

Ytterligare en fördel med att arbeta med olika representationsformer är att det möjliggör en differentiering av matematikundervisningen (Hurst & Linsell, 2020; Stylianou, 2010). Att differentiera undervisning genom att använda olika representationsformer är ett verktyg för att stärka jämlikheten i klassrummet (Stylianou, 2010). Hurst och Linsell (2020) påpekar att elever lär på olika sätt och att en varierad undervisning därmed kan tillgängliggöra

ämnesinnehåll för fler elever. I det praktiska genomförandet konstaterar Stylianou (2010) dock att elever i behov av utmaning, i större utsträckning, får möta olika representationsformer i samband med att de har arbetat färdigt med övrigt ämnesinnehåll.

Tidigare forskning belyser även, utöver fördelarna, svårigheterna med att implementera och arbeta med matematiska representationsformer (Hurst & Linsell, 2020; Johnson et al., 2020; Stylianou, 2010). Johnson et al. (2020) understryker att arbetet med representationsformer är tidskrävande i förberedelse-, organiserings- samt genomförandefasen. Samtidigt upplever lärare stress över att hinna undervisa med representationsformer i förhållande till stofftäta styrdokument (Johnson et al., 2020; Stylianou, 2010). I Stylianous forskning (2010) framkom det även att lärare inte ansåg att representationsformer är en central del av matematikundervisningen på mellanstadienivå, eftersom det inte var något som bedömdes i slutändan.

Ytterligare en svårighet med att implementera och arbeta med representationsformer är att lärare upplever det som utmanande på grund av representationsformers komplexitet (Stylianou, 2010). Hurst och Linsell (2020) betonar vikten av att lärare måste introduceras till och förstå användningen av representationsformer, för att det ska bli ett gynnsamt lärverktyg. I detta måste lärare stöttas i hur och var representationsformer är lämpliga att använda (Johnson et al., 2020; Stylianou, 2011; Puchner et al., 2008). Introduktionen för lärare, såväl som för elever, bör genomföras noggrant, långsamt och successivt (Stylianou, 2011; Puchner et al., 2008). Stylianous forskning (2011) belyser dessutom att lärare måste etablera en medvetenhet kring när, hur och varför representationsformer ska användas för att användningen inte ska bli kontraproduktiv. Utifrån Pollys (2015) forskningsresultat framkom det att lärare som hade deltagit i kompetensutveckling samt fick arbeta kollegialt med representationsformer förbättrade sin undervisning och elevers matematiska kommunikation utvecklades.

En förutsättning för, men även en svårighet med, att arbeta med representationsformer är att lärare måste ha tillgång till material såväl som tid och utrymme att använda det i undervisningen (Amo-Asante & Bonyah, 2023). Vidare menar Polly (2015), utifrån sitt forskningsresultat, att lärare som har fått utbildning i användningen av representationsformer generellt sätt använder dem i större utsträckning. Den största utmaningen som dock kvarstår är att förändra lärares rådande attityd till representationsformer (Stylianou, 2010).

4.3 Lärares utveckling av PCK

Penngård (2019) framhåller att PCK är ett fördelaktigt ramverk som medför att lärare kan sätta ord på sin kunskap för att kunna möta elevers lärande i förhållande till deras förkunskaper, förmågor och förutsättningar. Ett sätt för lärare att utveckla sin PCK är att lära sig om hur elever lär, från eleverna själva (Penngård, 2019). Li och Copur-Gencturk (2024) framhäver därtill att lärares erfarenhet av att undervisa gynnar vidareutvecklingen av PCK. Det är dessutom nödvändigt för lärare att besitta god CK, för att utveckla och fördjupa sin PCK. God CK är särskilt viktigt för att underlätta för lärare att identifiera elevers behov gentemot ämnesinnehållet och, utifrån det, hitta fungerande och effektiva metoder för fortsatt undervisning samt lärande (Li & Copur-Gencturk, 2024). Schiering, Sorge, Keller och Neumann (2022) studie resulterade i att CK och lärares erfarenhet är nyckelfaktorer för utveckling av PCK samt att olika nivåer av PCK kan särskiljas. Lärare med låga nivåer av PCK tenderar att använda allmänna och ospecificerade pedagogiska strategier samt upplever svårigheter att undervisa ämnesinnehållet på ett effektivt sätt som elever förstår. Lärare med höga nivåer av PCK använder däremot ämnesspecifika pedagogiska strategier som underlättar att undervisa på ett sätt som möter elevers lärande i förhållande till deras förkunskaper, förmågor och förutsättningar i ämnet. Ju högre nivåer av PCK som lärare utvecklar, desto mer avgörande blir deras praktiska erfarenhet i förhållande till CK för ytterligare vidareutveckling (Schiering et al., 2022). Vidare lyfte Penngård (2019) att lärares egna reflektioner över praktik och utveckling är viktigt för att skapa gynnsamma infallsvinklar till effektiv undervisning som elever förstår, i enlighet med PCK.

5. Metod

I detta kapitel framställs och förklaras studiens forskningsdesign, tillvägagångssättet för datainsamling och dataanalys samt en redogörelse för våra forskningsetiska överväganden. Avslutningsvis förs en diskussion gällande studiens reliabilitet och validitet.

5.1 Forskningsdesign

Denna studie grundades i en kvalitativ ansats med syftet att undersöka lärares erfarenhet av att använda matematiska representationsformer. Arbetet avser att generera djupgående undersökningar i förhållande till problemområdet och därmed är generaliserbarhet inte i fokus. Christoffersen och Johannessen (2015) framhåller att semistrukturerade intervjuer är en lämplig kvalitativ metod, ur detta avseende. Semistrukturerade intervjuer möjliggör att fånga deltagarnas erfarenheter på ett flexibelt och öppet sätt (Bryman, 2011).

Urvalet av studiens deltagare gjordes utifrån ett kriteriebaserat urval (Christoffersen & Johannessen, 2015). Kriterierna var att deltagarna behövde vara yrkesverksamma och legitimerade lärare som undervisar matematik på mellanstadiet samt att användning av representationsformer förekommer i undervisningen. Urvalet gjordes även utifrån ett bekvämlighetsurval, eftersom arbetet genomfördes under tidsbegränsning (Christoffersen & Johannessen, 2015). Deltagarna hittades därmed genom personliga rekommendationer, vilket även kunde fastställa att de uppfyllde det kriteriebaserade urvalet, och lärarna kontaktades via mejl eller telefon. Fem lärare valdes avsiktligt ut med olika lång yrkeserfarenhet från fyra olika skolor i två kommuner, för att säkerställa att de inte influerar varandras pedagogiska strategier. Antalet lärare avgränsades till fem, dels på grund av tidsbegränsningen och dels på grund av att kvalitativa undersökningar generellt utgörs av färre deltagare som undersöks djupgående. Tabell 1 presenterar deltagarna i studien.

Tabell 1: Presentation av deltagarna

Lärare	Erfarenhet	Klass	Kommun	Matematikkunskaper
L1	26-30 år	Årskurs 4. En klass, 26 elever	Stor kommun	En klass med relativt enhetliga matematikkunskaper. Ett fåtal elever i behov av stöd och ett fåtal elever i behov av utmaning.

L2	11-15 år	Årskurs 5. Två klasser, 19 respektive 21 elever	Liten kommun	Två klasser med relativt enhetliga matematikkunskaper. Ett fåtal elever i behov av stöd och ett fåtal elever i behov av utmaning.
L3	0-5 år	Årskurs 5. Två klasser, 17 respektive 18 elever	Liten kommun	Två klasser med kunskapsmässigt stor spridning. I den ena klassen är det fler elever som är i behov av stöd, i jämförelse med den andra klassen.
L4	26-30 år	Årskurs 6. Två klasser, 18 respektive 19 elever	Liten kommun	Två klasser med relativt enhetliga matematikkunskaper. Ett fåtal elever i behov av stöd och ett fåtal elever i behov av utmaning.
L5	21-25 år	Årskurs 4. Två klasser, 27 respektive 27 elever	Stor kommun	Två klasser där majoriteten av eleverna är i behov av stöttning.

5.2 Datainsamling

Metodvalet, semistrukturerade intervjuer, gjordes för att nå en djup och nyanserad bild av studiens frågeställningar. Bryman (2011) framhäver att semistrukturerade intervjuer kännetecknas av öppna frågor där intervjuaren, å ena sidan, har möjlighet att ställa följdfrågor och anpassa hur intervjun fortlöper samt att deltagarna, å andra sidan, har friheten att utforma svaren och därigenom påverka intervjuens innehåll. Trots flexibilitet och öppenhet, användes en intervjuguide (se Bilaga 1) för att skapa en struktur samt säkerställa att rätt innehåll behandlas. Detta genererade möjligheten att jämföra, analysera och tematisera deltagarnas svar för att nå slutsatser som besvarar studiens frågeställningar (Christoffersen & Johannessen, 2015).

Intervjuguiden utformades utifrån Christoffersen och Johannessen (2015) struktur och fyra olika områden av frågor formulerades; inledande frågor, en övergångsfråga, nyckelfrågor samt en avslutande fråga. De inledande frågorna inkluderades för att samla in enkel information om deltagaren samt att tryggt lotsa deltagaren in i intervjusammanhanget. Detta syftade intervjuguidens första och andra fråga till att göra. Intervjuguiden inkluderade därefter en övergångsfråga för att leda in informanten på ämnet och för att få deras personliga tolkning av representationsformer. Intervjuguidens fråga fyra till nio är nyckelfrågor, som ämnade att besvara frågeställningarna och syftet. Dessa frågor utgjordes av övergripande och öppna frågor, för att informanten skulle få möjlighet att forma svaren utifrån sina personliga erfarenheter. Nyckelfrågorna underbyggdes, i intervjuguiden, av mer konkreta underfrågor för

att säkerställa att all relevant information behandlades under intervjun. I momentet av underfrågor ställdes dessa, och eventuella tillägg i form av exemplifieringar och förtydliganden, utifrån vad som framkom under intervjun. Avslutningsvis ställdes en avslutande fråga för att ge informanten möjlighet att förtydliga, tillägga eller lyfta fram ytterligare information (Christoffersen & Johannessen, 2015).

Inför intervjuerna fick lärarna information om deras deltagande i studien såväl som att de fick ta del av intervjuguiden i förväg. I samband med intervjuernas genomförande fick deltagarna först läsa igenom och signera samtyckesblanketten (se Bilaga 2). Intervjuerna spelades därefter in via en diktafon, sparades på Malmö universitets server och transkriberades i nära anslutning till respektive intervju. Respektive intervju genomfördes av båda skribenterna till denna studie, för att skapa likvärdighet i intervjuernas genomförande. Intervjuerna varade i 25-40 minuter och utfördes på lärarnas arbetsplatser.

5.3 Dataanalys

Studiens insamlade data analyserades i enlighet med Braun och Clarkes (2006) tematiska analys. Utifrån Braun och Clarkes (2006) beskrivningar, finns det en induktiv tematisk analys och en teoretiskt tematisk analys. Denna studie bygger på en teoretisk tematisk analys, vilken utmärks av att insamling och bearbetning av data görs i förhållande till studiens förutbestämda frågeställningar, syfte och teoretiska ramverk. En teoretisk tematisk analys består av en process i sex steg (se Tabell 2).

Tabell 2: Egen översättning av stegen i Braun & Clarkes (2006) teoretiskt tematiska analys

Steg	Beskrivning
1	Skapa förtrogenhet med ditt material
2	Skapa initiala koder
3	Sök efter teman utifrån koderna
4	Granska, kombinera och omarbeta teman
5	Definiera och namnge teman
6	Producera text utifrån framtagna teman

Det första steget innefattar transkribering av samt att utveckla förtrogenhet med det insamlade materialet. Transkriberingen genomfördes i nära anslutning till respektive intervju. Samtliga deltagare aidentifierades och tilldelades pseudonymerna L1, L2, L3, L4 och L5 såväl som att det insamlade materialet transkriberades ordagrant, med en nästintill exakt återgivning av intervjun. Enstaka korrigeringar som gjordes var att ord som “ehm”, “eh”, “mhm” reducerades samt att visst talspråk korrigerades till skriftspråk, såsom att “dom” justerades till “de” eller “dem”. Det transkriberade materialet lästes därefter igenom flertalet gånger.

Det andra steget innebär att initialt koda transkriberingen, vilket gjordes genom färgmarkeringar och kommentarer (se figur 2). Materialet som färgades och kommenterades ansågs vara relevant utifrån frågeställningar, syfte och teori. Irrelevant material sållades därmed också bort.

Intervjuare 1: Vilka representationsformer skulle du säga förekommer oftast i din undervisning?

L4: Jag tänker bilder, jag vet inte vad vi ska kalla det men just att man ritat upp. Det kan vara block man ritat upp, det kan vara... Ja, men det kan vara fiskar man ritat upp. Så att just det visuella. Men det kan också vara alltså att man liksom, till exempel när vi gick igenom ekvationslösning, ja men då gömde jag under burkar då. Då hade man en burk och där var då plockmaterial små kuber och så visade man då, okej, hur gör jag detta. Då blev det mer plockmaterial. Så jag tror nog att de två är de två som används, förutom det matematiska språket, som jag anser är en del av det. Alltså man ska ju kunna använda sig av siffror... De tecknen också.

- Använder visuell representationsform
- Använder konkret representationsform
- Behöver symbolisk representationsform, hänvisar till det som formell matematik

Figur 2: Exempel på hur transkriberingen kodades med hjälp av färg och kommentar

I det tredje steget identifierades potentiella teman utifrån kodningen. Transkriberingen av intervjuerna jämfördes och deltagarnas svar, som hade kodats med samma färg och liknande kommentarer, organiserades i samma tema. I steg fyra komprimerades antalet potentiella teman. När temana granskades utifrån dataunderlaget framkom det att några inte utgjordes av tillräckligt mycket material eller att materialet i olika teman överlappade. Dessa omarbetades och kombinerades, vilket resulterade i mer övergripande teman. Det femte steget innebär att respektive tema definierades och namngavs. I det avslutande sjätte steget producerades resultatavsnittet utifrån framtagna teman.

5.4 Forskningsetiska överväganden

Studiens genomförande och rapportering genomfördes i enlighet med Vetenskapsrådets forskningsetiska (2002; 2024) principer, vilka utgörs av informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet, samt de grundläggande principerna för EU:s dataskyddsförordning GDPR.

I enlighet med informationskravet har deltagarna fått muntlig och skriftlig information om studiens syfte, genomförande samt hur data behandlas utifrån integritetsskydd. Samtyckeskravet efterföljdes eftersom deltagarna lämnade skriftligt samtycke (se Bilaga 2) till att delta. Deltagandet var frivilligt och de kunde när som helst återkalla sitt samtycke. Utifrån konfidentialitetskravet har samtliga deltagare och skolor oidentifierats. För ljudupptagningarna har en diktafon från Malmö universitet använts. Ljudupptagningarna lagras oåtkomligt, under studiens genomförande, på Malmö universitets servrar. Dessa raderas när arbetet har godkänts. Det insamlade materialet kommer, i enlighet med nyttjandekravet, enbart att användas för och av skribenterna till den aktuella studien.

5.5 Reliabilitet och validitet

Två begrepp som används för att bedöma studiens vetenskapliga kvalitet är reliabilitet och validitet. Reliabilitet definieras som tillförlitlighet, vilket kan bedömas utifrån upprepade undersökningar med samma deltagargrupp alternativt upprepade undersökningar utförda av andra forskare. En svårighet att bedöma reliabilitet i kvalitativa studier är dock att subjektivitet, och inte objektivitet, är i fokus. Det innebär att deltagarnas egna åsikter, erfarenheter och upplevelser belyses. Genomförandet av denna studie är transparent och motiverat, för att möjliggöra återupprepning av studien, vilket stärker dess reliabilitet. Reliabiliteten kan, å ena sidan, även påverkas av ett litet urval. Ett litet urval kan generera svårigheter att återupprepa undersökningen med samma resultat i en annan deltagargrupp. Å andra sidan kan reliabiliteten stärkas, eftersom deltagarna presenteras. Det skapar förutsättningar för att undersökningen lättare kan upprepas flera gånger eller av andra forskare i förhållande till en liknande urvalsgrupp (Christoffersen & Johannessen, 2015).

Vidare definieras validitet som giltighet, vilket avser att bedöma i vilken utsträckning mätningarna mäter det som är tänkt. I genomförandet av hela studien har återkopplingen till syfte och frågeställningar varit central för att säkerställa att det studien avser att undersöka

faktiskt undersöks. Vid utformning av exempelvis intervjuguiden konstruerades intervjufrågor utifrån studiens övergripande frågeställningar, vilket säkerställde att det som skulle mätas framkom i intervjuerna. Tilläggsvis fick deltagarna ta del av intervjuguiden på förhand, för att försäkra att de förstod och kunde svara på frågorna. Det var viktigt för att intervjuunderlaget skulle kunna ge svar på frågeställningarna. Utifrån validitetsbegreppet kan en bedömning göras utifrån att det som studien avsåg att mäta, har mätts. Det har däremot gjorts utifrån ett litet urval, vilket resulterar i att resultatet inte är generaliserbart och att slutsatserna inte är valida för hela samhället (Christoffersen & Johannessen, 2015).

6. Resultat och analys

I nedanstående kapitel presenteras studiens empiriska material i tre avsnitt. Varje avsnitt representerar en av studiens tre frågeställningar och utgörs av teman och koder som framkom vid den teoretiskt tematiska analysen. Först presenteras mellanstadielärares användning av representationsformer i matematikundervisning utifrån lärares tolkning och erfarenhet av representationsformer samt hur och när det används i undervisningen. Därefter redovisas mellanstadielärares uppfattning om hur matematiska representationsformer påverkar elevers lärande i matematik. Avslutningsvis anges förutsättningar för att kunna bedriva undervisning med matematiska representationsformer utifrån yttre och inre ramfaktorer. Resultatet analyseras genomgående utifrån det teoretiska ramverket PCK.

6.1 Mellanstadielärares användning av representationsformer i matematikundervisning

6.1.1 Lärares tolkning och erfarenhet av representationsformer

Samtliga lärare i studien definierade representationsformer som olika sätt att visa och presentera matematik. Gemensamt för deltagarna är att de använder sig av varierade representationsformer i sin undervisning. Detta tyder på att samtliga lärare använder representationsformer som en pedagogisk strategi och därmed besitter PK i detta avseende (Schulman, 1987). Utöver den symboliska representationsformen uttryckte fyra av fem lärare att de använder både visuella representationer samt konkreta representationer. L3 uttryckte dock att hen, utöver den symboliska representationsformen, huvudsakligen använder konkret material i sin undervisning.

Alla responderande lärare instämmer att matematikboken används i lektionsarbetet, men att de behöver komplettera denna för att kunna arbeta varierat och därmed nå alla elevers lärande. Lärarna använder antingen Alfa Beta Gamma eller MatteDirekt. L4 poängterade att visuella representationer lyfts till viss del i MatteDirekt, men att konkret material inte inkluderas i samma utsträckning. Att lärarna är införstådda med att matematikboken inte är tillräcklig för att eleverna ska kunna ta till sig ämnesinnehållet fullt ut, tyder på att de innehar CK (Schulman, 1987). Lärarna uttryckte att deras erfarenhet var att de behöver komplettera

matematikboken på egen hand. Varierade representationsformer används därför huvudsakligen utöver matematikboken, vilket exempelvis L2 belyste genom citatet:

“Vi har ett fantastiskt läromedel, där.. där finns mycket olika valmöjligheter. Men jag, jag försöker alltid att hitta någon praktisk uppgift till det vi har gått igenom... För jag tror att får man med att jobba med händerna eller man spelar med tärningar eller någonting så lockar det till... till ett nytt lärande för dem” (#1L2)

Utifrån lärarnas erfarenhet av att arbeta med varierade representationsformer anser de att det blir ett lustfyllt lärande som många elever uppskattar, vilket L1 och L5 uttryckte:

“Att det är roligare, att det är mer intressant, även om många barn faktiskt älskar att jobba i matteboken.” (#2L1)

“Att det är roligare än att bara lyssna på läraren som står framme och maler vid tavlan och ritlar på tavlan och så för då är de inte delaktiga på samma sätt.” (#3L5)

Samtliga lärare uttryckte, utifrån sin erfarenhet, att de upplever användning av representationsformer i undervisningen som gynnsamt för elevers lärande. Att lärarna använder fungerande och effektiva pedagogiska strategier i kombination med att de har ämneskunskaper om matematikbokens begränsningar indikerar på en utvecklad PCK (Schulman, 1987). Trots att alla deltagare uttryckte att representationsformer är gynnsamma, genomförs användningen med viss variation.

6.1.2 Hur och när representationsformer används i undervisningen

Lärarnas användning av representationsformer i undervisningen uppvisade både likheter och skillnader. Tabell 3 nedan visar hur och när de responderande lärarna använder representationsformer i undervisningen samt om flera representationsformer anses vara nödvändiga.

Tabell 3: Sammanställning av lärarnas svar på studiens intervjufrågor

Lärare	Användning	Kontinuitet	Uppmuntran	Nödvändigt
L1	<ul style="list-style-type: none">• Genomgång• Eget arbete• Par/grupparbete	Ganska kontinuerligt	Ja	Ja

	<ul style="list-style-type: none"> • Modellerar för eleverna 			
L2	<ul style="list-style-type: none"> • Genomgång • Eget arbete • Par/grupparbete • Eleverna utforskar på egen hand först 	Ganska kontinuerligt	Ja	Ja
L3	<ul style="list-style-type: none"> • Genomgång • Eget arbete • Modellerar oftast för eleverna 	Varierar beroende på arbetsområde	Ibland	Ja
L4	<ul style="list-style-type: none"> • Genomgång • Eget arbete • Par/grupparbete • Modellerar för eleverna 	Ja, alltid	Ja	Ja
L5	<ul style="list-style-type: none"> • Genomgång • Eget arbete • Par/grupparbete • Modellerar för eleverna och eleverna utforskar på egen hand 	Varierar beroende på arbetsområde	Ja	Ja

Lärarna hade relativt lika tillvägagångssätt för i vilka lektionsmoment de använder representationsformer, men skiljer sig åt i hur de introducerar dem för eleverna (se Tabell 3). En utvecklad PCK innebär att lärare kan anpassa undervisningen utifrån elevers förkunskaper, förmågor och förutsättningar (Schulman, 1987). Lärare som bedriver undervisning med samma pedagogiska strategi, men med medvetenhet om att det kan behöva genomföras på olika sätt, tyder på en utvecklad PCK (Schulman, 1986). Tre av fem lärare modellerar användningen av representationsformer, medan en av fem lärare låter eleverna utforska på egen hand. L5 poängterade dock vikten av att kombinera både lärarens modellering och elevernas eget utforskande:

“Ja jag modellerar också vid sidan av för de behöver olika saker, alltså alla elever... vad ska man säga... alla typer av sinnen liksom sen att både att lära sig av sig själv, sina kompisar men även faktiskt att läraren är den som styr är ju, ju mer de kan få och ju mer blandning desto bättre tycker jag.” (#4L5)

Fortsättningsvis skilde sig kontinuiteten av lärarnas användning av representationsformer åt (se Tabell 3). Två av lärarna uttryckte att de arbetar med representationsformer, men att kontinuiteten varierar beroende på arbetsområde. De andra tre lärarna kontrasterar detta. De använder representationsformer kontinuerligt i alla arbetsområden, vilket L4 betonade:

“Inte vad jag kan komma på... Om jag tänker i geometrin, absolut, då använder man det. Algebran, absolut. De fyra räknesätten, de grundläggande, ja men de måste ju förstå t.ex. ental, tiotal, hundratal, vad det innebär med växla, där kan man ju använda sig av pengar och så vidare. Så att, nej jag kan inte komma på något så direkt som inte...” (#5L4)

Två av de tre lärarna som arbetade kontinuerligt med representationsformer påpekade däremot att även om representationsformer används i alla arbetsområden, används det inte vid färdighets- och metodträning. L1 och L2 betonade att det är nödvändigt för elever att färdighetsträna eller att öva in en speciell metod vid särskilda tillfällen. I dessa situationer upplevde de att representationsformer inte behövs och att repetition istället gynnar elevernas lärande.

Vidare undersöktes det huruvida lärarna uppmuntrar eleverna till att använda representationsformer och om flera representationsformer är nödvändiga, eller inte (se Tabell 3). Lärarna svarade relativt samstämmigt att de uppmuntrar sina elever till att använda olika representationsformer när de löser matematikuppgifter. De uppmuntrar eleverna genom att exempelvis uppmana dem till att rita sina lösningar för att visa sitt tankesätt eller att använda konkret material för att konkretisera uppgifterna. L3 uppgav att hen till viss del uppmuntrar sina elever att använda olika representationsformer, men att användning främst sker på eget initiativ utifrån det material som finns tillgängligt i klassrummet. Samtliga deltagare ansåg även att flera representationsformer är nödvändigt att använda i matematikundervisningen.

6.2 Mellanstadielärares uppfattning av hur matematiska representationsformer påverkar elevers lärande i matematik

Utifrån respondenternas svar framkom det att representationsformer fyller flera funktioner i matematikundervisning. Samtliga lärare uttryckte att alla elever lär på olika sätt och därmed måste ämnesinnehållet tillgängliggöras på flera sätt. Denna insikt tyder på en god PCK (Schulman, 1987). En funktion av att använda varierade representationsformer är att flera sinnen aktiveras och matematik kan presenteras på olika sätt, vilket följande citat lyfter fram:

“Men oftast behöver man ju presentera saker och ting kanske på lite olika sätt för att fånga så många som möjligt.” (#6L1)

“Jag tänker att barn lär ju sig på olika sätt. Så att jag tycker att det är viktigt att presentera många olika sätt, och sen är ju målet att de hittar sitt sätt.” (#7L4)

“(…) för de behöver olika saker, alltså alla elever... vad ska man säga... alla typer av sinnen liksom (…)” (#8L5)

Lärarna i studien uttryckte att matematik är abstrakt. Detta tyder på att lärarna besitter CK (Schulman, 1987), eftersom de har goda kunskaper om att ämnesinnehållet är abstrakt. En funktion av att använda representationsformer är att de konkretiserar och visualiserar det abstrakta. När lärare kan undervisa utifrån sin förståelse och insikt om detta, har de utvecklat en högre nivå av PCK (Schulman, 1987). Representationsformer genererar en stöttning för elever i deras förståelse av samt förmåga att lösa matematiska uppgifter, vilket synliggjordes i citaten:

“Jag tänker ju fler man använder, desto fler kanske man kan få att liksom greppa det abstrakta och hänga med och förstå varför man gör saker.” (#9L3)

“(…) men det är många barn som inte har det abstrakta som behöver se på ett annat sätt. Tallinje till exempel tycker jag är bra, det har man redan på lågstadiet men det är också bra även på mellanstadiet (…)” (#10L1)

“(…) när de väl fastnar så är det oftast att “jag kan inte, jag vill inte” och så låser det sig. Man försöker “ja men om jag försöker att rita eller gör jag såhär, dra något streck eller något litet” så brukar man ändå komma en bit på vägen och då lossnar det oftast.” (#11L2)

Vidare framförde samtliga lärare att representationsformer är fördelaktiga för elevers lärande genom hela grundskolan. Samtidigt påpekade tre av lärarna relevansen av att elever måste sträva efter att utveckla ett abstrakt matematiskt tänkande. De menade att representationsformer är viktiga att använda för att nå förståelse för den symboliska representationsformen och att kunna använda de mest effektiva metoderna. Lärarna förtydligade dock att det inte innebär att användningen av varierade representationsformer ska utebli i de högre årskurserna.

“(…) för tanken är ändå att när du håller på med pizzabitarna att du ska kunna tänka utan pizzabitarna längre fram. Så du ska inte alltid, sitter du sen med ett prov eller ett test kan du inte plocka fram pizzabitarna, då ska du ju ändå ha kommit till de mer abstrakta. (...) Men det är inte så lätt att den gränsen mellan trean och fyran *swishljud* när man går över den gränsen att så är man på det abstrakta.” (#12L1)

“Sen när man kommer upp i 6:an inför betygen så pratar vi mycket om vilket som är det effektivaste sättet att lösa, vad som kommer till nästa nivå.” (#13L2)

“Jag tror ju ändå att det kanske avtar lite. Alltså att man kanske har mer i årskurs fyra och sen liksom bygger man upp det men det slutar ju inte i sexan utan det... Jag behöver ju göra det så fort det är något nytt så får man nästan börja med det konkreta. Men det kanske är lite mer i fyran och lite mindre i sexan. Men det är inte, det är inte slut för att de går i sexan. (...) Alltså jag tänker att den är en så naturlig del i undervisningen så att nej. Och jag hoppas att det fortsätter när de kommer upp på högstadiet.” (#14L4)

Fortsättningsvis diskuterade lärarna huruvida användningen av representationsformer är gynnsamt för elevers lärande, eller inte. Utifrån lärarnas svar fanns ett fokus på elever som är i behov av stöd respektive elever som är i behov av utmaning. Fyra av fem lärare svarade enhälligt att elever i behov av stöd gynnas av att använda varierade representationsformer, eftersom det tydliggör och konkretiserar matematik såväl som att det skapar intresse och glädje när de får uppleva att matematik är mer än bara symboler. Gällande detta kunde L3 jämföra sina klasser (se Tabell 1) och yttrade:

“Ja, men jag tänker som nu när vi har haft geometri där man tar fram en figur, man kan öppna upp figuren, man kan vika ut den och då ser man att ja men här består ju faktiskt kuben av sex stycken kvadrater. Och viker vi ihop dem så blir det en kub till exempel... Det kan underlätta för många... Sen finns det ju de som inte alls behöver det, för att de ser det direkt.” (#15L3)

L2 svarade att hen upplever att elever i behov av stöd också gynnas, men att valmöjligheterna som uppstår när varierade representationsformer används kan bli för många. I samband med detta visar läraren att hen har förståelse för den pedagogiska strategins möjligheter och begränsningar. Att läraren kan använda denna förståelse för att anpassa undervisningen efter elevers förkunskaper, förmågor och förutsättningar, tyder på en hög PCK (Schulman, 1987).

Hen betonade att lärare därtill kan behöva vägleda elever i behov av stöd till passande representationsformer för respektive ändamål.

“I så fall är det till de svaga eleverna som har svårt att... att välja en metod, alla de här valen, som oftast är svårt. Att där brukar vi ibland “ja, men nu vill jag att du löser den på det här sättet”. Där får man gå in och styra (...)” (#16L2)

Samtliga lärare är eniga om att även elever i behov av utmaning gynnas i sitt lärande, men inte i lika stor utsträckning som elever i behov av stöd. I svaren framgick det att elever i behov av utmaning har ett mer utvecklat abstrakt tänkande, vilket medför att matematiken inte behöver konkretiseras och tydliggöras i samma utsträckning. Elever i behov av utmaning arbetar ofta snabbt och självständigt, vilket resulterar i att de ofta räknar och förhåller sig till ett tankemönster. L1 menar därför att representationsformerna kan gynna dessa elever genom att de får tillgång till fler infallsvinklar i matematik:

“Eller ibland när man ska se, ibland har vi haft tredimensionella, när man sätter ihop klossar och man ska försöka se det abstrakta... Så är man lite snabb så man tänker inte men hade man haft klossarna och byggt då hade de sett att man kan inte bygga den utav de figurerna. Så även de som är långt gångna i matte kan faktiskt ibland ha nytta utav att använda lite konkreta saker. Eller höra av någon annan elev att såhär kan man också göra. Så jag tror faktiskt att alla gynnas.” (#17L1)

L2 förklarar därtill att elever i behov av utmaning blir mer självständiga i matematik, eftersom tid och energi prioriteras till elever i behov av stöd:

“Jag skulle inte säga att det hämmar, men som sagt de starka eleverna de, de utmanas och utvecklas på sitt eget sätt. De är självständiga. Sen behöver de också utmanas och utvecklas, men de, de tänker man ibland lite bort för att de, det löser sig och de kommer vidare. De, de svagare eleverna är ju svårare och där är det så mycket som spelar roll tror jag.” (#18L2)

Trots att intervjuvärdens fokuserade på hur lärandet hos elever i behov av stöd och i behov av utmaning påverkas av representationsformer, svarade lärarna att alla elevers lärande generellt gynnas. L5 tillade att matematikfobi existerar hos elever, oavsett kunskapsnivå, och att representationsformer kan vara ett sätt att stärka deras självförtroende och skapa trygga

lärmiljöer. L3 poängterade däremot att det måste finnas medvetenhet kring hur användningen av representationsformer introduceras. Hen förklarade, utifrån sin erfarenhet, att det inte alltid mottages väl av eleverna och då gynnar representationsformer inte deras lärande. Enligt Schulman (1987) kombinerar lärare, med välutvecklad PCK, ämnesinnehållet med lämpliga pedagogiska strategier. Ovan nämnda exempel belyser att en vald pedagogisk strategi inte alltid är bäst lämpad för ändamålet. Detta indikerar på behovet av att vidareutveckla lärarens PCK samt att lärares praktiska erfarenheter bidrar till denna utveckling.

I intervjuerna framgick det att deltagarna eftersträvar en differentierad undervisning genom varierade arbetssätt. Samtliga lärare ansåg att representationsformer differentierar undervisning och aktiverar elever, eftersom det möjliggör för elever att arbeta och lära tillsammans, kommunicera matematiskt samt att nivåanpassa ämnesinnehållet. L3 och L5 framförde att elever som endast arbetar enskilt i matteboken med symboliska representationer lättare kan stanna upp och dagdrömma, fuska samt gömma sina svårigheter. De ansåg att det inte är möjligt i samma utsträckning när elever är aktiva.

“Sitter de bara och ska räkna uträkningar med symboler, då är det lätt att man kanske... Det är lättare att pausa, stanna upp, dagdrömma än vad det är om man hela tiden är aktiv med att göra någonting.” (#19L3)

“Man kan inte gömma sig på samma sätt när man, när man tvingas prata matematik och liksom om vi tänker... i det kooperativa också i det här som det ändå blir att man ska sitta i grupper och berätta för varandra.” (#20L5)

Även om lärarna upplevde att representationsformer möjliggör en differentierad och aktiv undervisning som gynnar elevers lärande, uttryckte samtliga lärare att det finns ramfaktorer som påverkar deras användning av representationsformer.

6.3 Förutsättningar för att kunna bedriva undervisning med matematiska representationsformer

6.3.1 Yttre ramfaktorer

Samtliga lärare uttryckte att de vill använda representationsformer, eftersom de ser att elevers lärande gynnas, men att yttre ramfaktorer begränsar deras möjlighet. Intervjusvaren tyder

därmed på att lärare kan besitta PCK, men att de inte kan utnyttja den fullt ut på grund av yttre faktorer. Nedan följer beskrivningar av faktorer som inte rymms inom varken CK eller PK (Schulman, 1986; Schulman, 1987), men som trots allt påverkar lärares möjligheter att effektivt och meningsfullt undervisa om ämnesinnehållet.

En första yttre ramfaktor som lärarna lyfte fram var materialtillgång. Alla, utifrån sin erfarenhet, upplevde att bristen på material blir en begränsning. Tre av fem lärare hade dock tillgång till material i den utsträckning som deras elevgrupp behövde, men förstod att det är en förutsättning för att bedriva undervisning med varierade representationsformer.

“och sen material givetvis. Där måste finnas tillgång till material för att kunna... Ja men använda det. Vi har nog ganska gott om material, (...)” (#21L4)

L2 och L5 hade inte tillgång till material i den utsträckning som de behövde. De förklarade att vid en begränsad tillgång krävs det att läraren tillverkar materialet på egen hand, vilket är tidskrävande. Deras erfarenhet bekräftade övriga tre lärares tankar om materialtillgång.

“Framförallt att vi inte har tillgång till konkret material... Det ser jag har en jättebegränsning i... och att hitta allt som ska passa... Mycket gör man själv och det tar tid att göra.” (#22L2)

“Begränsningar, ja det har kunnat vara budget till exempel asså vi har det ganska torftigt med material så, alltså alla klassrum... alltså drömmen hade varit att alla klassrum hade sin egen uppsättning liksom av 10-baslådor liksom, centikuber och allt sådant (...)” (#23L5)

En andra yttre ramfaktor som lärarna lyfte fram var tidsbegränsning. Samtliga lärare uttryckte att de upplever sin yrkesroll som tidspressad. Samtidigt påpekade de att arbetet med varierade representationsformer är mer tidskrävande, i form av planering, förberedelse och genomförande, i jämförelse med arbetet i matematikboken.

“I den, sen är vi ju sjukt... alltså vi är ju pressade i våra schema. Och det gör ju också att man hade kanske kunnat göra lite extra än vad man gör. Men... Jag upplever ändå att vi har en väldigt god matteundervisning. (...) Vi har... nu har kommunen satsat på

lite extra mattetimmar, så det känns bra i undervisningen att vi har, vi täcker det, utan att stressa.” (#24L2)

“Man ska liksom hinna med det också och det vi är vi har väldigt begränsad planeringstid... Så att... om tid hade funnits lite mer av så att så hade det varit lättare.” (#25L4)

Vidare framkom det i intervjuerna att lärare kan uppleva stress i förhållande till matematikbokens och kursplanens stofftätthet, såväl som att matematikboken styr det stoff som eleverna bedöms på i de nationella proven. Två av deltagarna upplevde att lärare som känner sig stressade inför att behandla allt stoff sätter arbetet i matematikboken i fokus medan arbetet med varierade representationsformer kommer i andra hand. Tilläggsvis påpekade L5 att lärare i största möjliga mån ska försöka undvika detta, eftersom det inte gynnar elevernas lärande. L1 instämmer, men poängterar svårigheterna att hinna med i förhållande till tidsaspekten genom att:

“För hur det än är så är ju läroplanen kopplad till nationella proven även om inte allting tas upp på nationella proven men det är det som sen rektorerna tittar på, det är det som kommer in i statistiken, det är det som visar om du har lyckats eller inte lyckats och det är väldigt viktigt med bra siffror. Så att jag förstår att lärare blir stressade. Så även om du kanske vill utvidga ett område i matten och tänker att ja men vi kan göra det här och det här också och ta in annat så, men vi hinner inte för att vi måste göra det här de veckorna och de här de veckorna så att vi hinner allting till slut. Tiden är en stress.” (#26L1)

En tredje ramfaktor som deltagarna framförde var klasstorleken. L1 och L5 hade klasser med fler än 25 elever och de betonade huvudsakligen svårigheten att räkna till som ensam lärare i klassrummet. Resterande tre lärare hade klasser med färre än 20 elever, men även de påpekade att klasstorleken påverkar möjligheten att arbeta med varierande representationsformer. Kontentan från deras svar var att ju större klass, desto svårare blir arbetet med representationsformer eftersom lärare behöver observera, hjälpa, återkoppla till och förbereda för fler elever såväl som att utrymmet i klassrummet blir mer begränsat.

“Så tänker jag såhär att ofta stora klasser, ensam lärare, svårt att hitta någon plats att sitta, för du behöver kanske ha lite avskilt om man ska jobba lite olika, för stora

klasser. Jag tror klasserna alltså att klasstorlekarna är det största hindret, tror jag.” (#27L1)

“Jag tänker att ju färre elever, desto mer tid. Och desto lättare blir det och när det inte är lika mycket och ta fram och förbereda. Så absolut, det skulle jag säga. (...) Ja, jag tänker att allting blir svårare i en väldigt stor klass.” (#28L3)

L5 poängterade dessutom att hen upplever att i stora och utmanande klasser vågar inte alla lärare arbeta med varierande representationsformer, vilket följande citat visar:

“De är... kanske många lärare tänker att man inte vågar det, visst det kan första gångerna vara jobbigt men ju mer man tränar dem i det, de behöver det också. (...) För också lite rädda, de klarar inte min grupp för de är så svaga och röriga. Det blir så där va.” (#29L5)

Lärarna ansåg därför att mindre klasser eller ytterligare en pedagog i klassrummet är förutsättningar för att bedriva undervisning med representationsformer i önskvärd utsträckning.

Den sista yttre ramfaktorn som framkom vid intervjuerna var bristen på kompetensutveckling. Fyra av fem lärare svarade samstämmigt att de inte har fått någon kompetensutveckling gällande representationsformer, medan en av fem lärare svarade att hen fick påbörja kompetensutveckling i samband med ett matematikprojekt. Projektet avslutades dock i förtid och deltagarna fick därmed inte ta del av kompetensutvecklingen fullt ut. En av lärarna förklarade också sin frustration över att kommunen inte tillför pengar till matematikutveckling, trots elevers låga matematikresultat. Samtliga lärare lyfte däremot att de kan ta hjälp och få råd av sina kollegor i ett kollegialt samarbete, vilket ansågs givande. De betonade dock att kompetensutveckling och kollegialt samarbete inte kan likställas. L5 förtydligade detta när hen förklarade att en kombination av dem hade varit en optimal förutsättning. Kompetensutveckling gällande ämnesinnehåll eller pedagogiska strategier hade kunnat vara ett sätt att stötta lärares utveckling av CK och PK. Schulman (1987) poängterar att lärare behöver kunskaper i både CK och PK för att dels utveckla sin PCK och dels få elever att förstå.

6.3.2 Inre ramfaktor

Utöver de yttre ramfaktorerna, uttryckte lärarna att det huvudsakligen finns en inre ramfaktor som påverkar deras användning av varierande representationsformer. Samtliga lärare svarade enhälligt att yrkeserfarenheten har en stor påverkan på denna användning. Lärares CK och PK utvecklas i takt med deras erfarenhet. I takt med att lärares erfarenhet utvecklas, utvecklas även deras PCK (Schulman, 1986; Schulman, 1987).

Fyra av fem lärare svarade att de har lång yrkeserfarenhet och därmed har etablerat kunskap och en vana av att integrera representationsformer i matematikundervisningen, vilket L2 uttrycker i citatet:

“(...) sen är det mycket med erfarenheten känner jag. Där är mycket som sitter någonstans i ryggmärgen som man bara plockar fram, att såhär gjorde jag innan, ja men det kan vi... passar här. Att sitta och leta efter nya övningar inför varje ny genomgång är... det är jättetidskrävande. Så där tror jag ändå att erfarenheten spelar en stor roll...” (#30L2)

En av fem lärare, L3, svarade att hen är nyexaminerad lärare. Läraren uttrycker flertalet gånger att hen gör allting för första gången och därmed får chansa fritt gällande vad som kommer att fungera och inte för elevgruppen. Utifrån ramverket PCK tyder detta på att läraren utgår från sin känsla, och inte erfarenhet, om vad som lär fungera. Det indikerar att hen fortfarande utvecklar sin erfarenhet gällande vilka pedagogiska strategier, PK, som är lämpliga för respektive ämnesinnehåll och elevgrupp (Schulman, 1987). Utan lång yrkeserfarenhet upplevde L3 svårigheter med att exempelvis hinna göra alla planeringar från grunden samt veta var och när respektive representationsform fungerar och gynnar elevers lärande. Det synliggörs i följande citat:

“Sen tycker jag det är svårt nu när det är första gången man gör allting, så är man inte riktigt säker på vad som kan vara bra och ta in. (...) När man har en större bank och luta sig på, så är det lättare att ta något som man redan har och addera. Tidsmässigt också, och hinna med. De tio timmarna man har försvinner snabbt.” (#31L3)

L5 belyste också svårigheten som nyexaminerade lärare kan uppleva gällande tid och erfarenhet såväl som hur yrkeserfarna lärare inte upplever svårigheten på samma sätt:

“Du lägger mindre tid, du slänger ihop en riktigt bra lektion fyra gånger så snabbt jämfört när jag var helt nyexad och då satt man ju liksom 20 timmars förtroendetid. *skratt*. Så är det. För att du hittar, vad funkar, vad funkar inte och plockar fram gammalt skåpmat, lite så, man har liksom ett arkiv i sin dator och även om man själv... man kan slänga ihop något ganska bra genom att skjuta från höften när man jobbat 22 år i skolan.” (#32L5)

Under intervjun förklarade L3 även sin syn och tolkning av läroplanen. Hen poängterade att den, i många avseenden, är fri för tolkning och därmed genererar en stor frihet för hur lärare väljer att utforma sin undervisning. L3 betonade att det, som ny i yrket, hade underlättat med tydligare guidning om hur undervisningen ska utformas:

“ (...) hade det funnits en mall för hur man använder och vad som är bra och använda till vilka, till vilka arbetsområden så hade det varit jättebra om det fanns en *skratt* hade funnits en manual hade jag gärna läst den.” (#33L3)

De fyra övriga lärarna visade i sina svar stor förståelse för detta och beskrev att man behöver förlita sig på något. Matematikboken gavs som ett gott exempel för detta ändamål.

“Det är ju som jag brukar säga till de som kommer ut nya, att ja, du behöver kanske ha någonting att luta dig mot. En matematikbok är ju bra att luta sig mot i början och det har jag ju fortfarande. Men att inte det är det enda, att man försöker få in annat. Men det är ju tufft när man är ny och erfarenhet gör ju att man har en bank.” (#34L4)

Samtidigt framkom det att även nya lärare behöver ha en vision för sin matematikundervisning och våga prova nya metoder utöver matematikboken. L3 framförde i intervjun att hen vågar prova på nytt. Det indikerar att hen strävar efter att bygga på sin erfarenhet och Schulman (1987) menar att utveckling av PCK sker i takt med detta.

7. Slutsats och diskussion

I följande kapitel presenteras slutsatser för studiens tre frågeställningar, följt av en diskussion gällande resultat och analys i förhållande till tidigare forskning. Vidare presenteras studiens bidrag till yrkesprofessionen och därefter förs en diskussion gällande studiens metodval. Avslutningsvis presenteras förslag till vidare forskning.

7.1 Slutsatser

Studiens syfte är att, utifrån frågeställningarna, öka förståelsen för hur mellanstadielärare använder matematiska representationsformer och hur det påverkar elevers lärande såväl som att sammanställa förutsättningarna för att bedriva undervisning med representationsformer. Utifrån vad som presenterades i resultat- och analysavsnittet, mynnar undersökningen ut i tre slutsatser.

En första slutsats är att mellanstadielärare använder matematiska representationsformer som ett lärverktyg. I resultatavsnittet synliggjordes det att lärarna använder varierade representationsformer, såsom den visuella och konkreta, utöver den symboliska representationsformen för att elever ska lära sig förstå matematik såväl som att kommunicera matematiskt. Det framgick att denna pedagogiska strategi huvudsakligen används utöver arbetet i matematikboken, vilket skapar ett lustfyllt lärande. Verksamma och blivande lärare behöver, i detta avseende, utveckla förtrogenhet med sin PK gällande var representationsformer är lämpligt att använda i respektive lektionsmoment, arbetsområde samt hur eleverna ska introduceras till det. När lärare kan förhålla sig till och använda en kombination av ämnesinnehållet och representationsformer som en pedagogisk strategi, har de förhöjt sin nivå av PCK. I relation till detta fanns det en medvetenhet hos samtliga lärare att representationsformer, som ett lärverktyg, behöver återkomma regelbundet i undervisningen. Det var dock enbart tre av fem som använde representationsformer kontinuerligt.

En andra slutsats är att matematiska representationsformer är ett lärverktyg som är gynnsamt för alla elevers lärande, men att det krävs att lärare är medvetna om dess möjligheter och svårigheter. Lärarna uppfattade att representationsformer gynnar elevers lärande genom att de får se matematik ur olika synvinklar, kommunicerar matematiskt, får stöttning genom att abstrakt matematik konkretiseras samt att de får ta del av en aktiv och differentierad

undervisning. Utöver de pedagogiska möjligheterna är det nödvändigt att verksamma såväl som blivande lärare är medvetna om och kan hantera svårigheterna vid användning av representationsformer, för att elevers lärande ska gynnas. Lärarna uppfattade att valet mellan varierande representationsformer kan bli överväldigande för elever, att elever fastnar i övergången mellan representationsformer samt att användningen inte blir gynnsam om elever inte förstår hur eller varför de ska använda representationsformer. När lärare har utvecklat och kan förhålla sig till denna medvetenhet och förståelse har de vidareutvecklat sin PCK, eftersom de också kan anpassa användningen och överbrygga svårigheterna.

En tredje slutsats är att yttre ramfaktorer och erfarenhet påverkar mellanstadielärares användning av representationsformer i matematikundervisning. Samtliga lärare framförde att tillgång till material samt tid för förberedelse, planering och genomförande är grundläggande förutsättningar för att använda representationsformer i undervisningen. Ytterligare förutsättningar som kan underlätta användning av representationsformer är kompetensutveckling samt färre elever i klassen eller förstärkt personalstyrka i klassrummet. Följaktligen, i det praktiska genomförandet underlättar en gedigen erfarenhet användningen av representationsformer när ovan nämnda förutsättningar begränsas. I resultatet synliggjordes det att erfarenhet påverkar lärares CK och PK positivt. Det underlättar användningen av representationsformer på ett sätt som gynnar elevers lärande samt utvecklar lärares PCK.

7.2 Resultatdiskussion

Vår studies resultat överensstämmer med tidigare forskning gällande aspekten om att matematiska representationsformer är ett bra sätt för elever att förstå matematik (Johnson et al., 2020; Sokolowski, 2018; Stylianou, 2011) och kommunicera matematiskt (Polly, 2015; Stylianou, 2010). I resultatet av denna studie framkom det att lärarna var eniga i sina definitioner om vad representationsformer är samt att lärare använder dem som ett lärverktyg, vilket avviker från vad Puchner et al. (2008) och Stylianou (2010) belyser i sina studier. Till skillnad från vår studie, visar tidigare forskning att lärare har svårt att definiera vad representationsformer är samt att representationsformer blir ett mål i sig och inte ett verktyg för att förstå och lära matematik (Puchner et al., 2008; Stylianou, 2010). Vi anser att detta indikerar att det finns ett samband mellan förståelse för vad matematiska representationsformer är, CK, samt hur de bör användas, PK. I överensstämmelse med

Stylianou (2010) visar dock resultatet av denna studie att den symboliska representationsformen är den formella och eftersträvansvärda matematiken samt att representationsformer är ett sätt att nå förståelse för symboliska representationer.

Vårt resultat överensstämmer till stor del med tidigare forskning gällande hur elevers lärande gynnas genom att använda matematiska representationsformer. Exempelvis framgick det i resultatet att elever bör få möta varierande representationsformer eftersom de får ta del av en differentierad och aktiv undervisning samt kommunicera matematiskt, vilket gynnar elevers lärande. Polly (2015), Stylianou (2010) samt Hurst och Linsell (2020) har identifierat liknande effekter i sina studier. Varierade representationsformer genererar fler infallsvinklar i matematik, vilket är i enlighet med både vår studie och forskningen av Nasrun et al. (2021). Vår studie avviker dock från Stylianous (2010) forskning gällande vilka elever som får möta och gynnas av representationsformer. Lärarna i denna studie framförde att alla elevers lärande gynnas av representationsformer. De poängterade dock att elever i behov av stöd använder samt gynnas av det i störst utsträckning, eftersom det är ett sätt att konkretisera abstrakt matematik och stötta elevernas förståelse för den symboliska representationsformen. Vårt resultat kan kontrasteras mot resultatet i Stylianous (2010) forskning, där framförallt elever i behov av utmaning får möta varierande representationsformer som utfyllnad i matematikundervisningen. Vi anser att det återigen tydliggör att representationsformer i praktiken inte alltid används som det lärverktyg, som vår studie identifierade.

Denna studie visade, precis som Hurst och Linsell (2020) har uppmärksammat, att det inte automatiskt är fördelaktigt att använda matematiska representationsformer. Det förekommer svårigheter som lärare måste vara medvetna om och kunna hantera. Tidigare forskning belyser vikten av kompetensutveckling gällande hur representationsformer ska introduceras såväl som när, var och hur de ska användas. Lärare som tog del av detta samt som fick arbeta kollegialt förbättrade användningen av representationsformer i sin matematikundervisning, vilket gynnade elevernas matematiska kommunikation (Polly, 2015). I vår studie framkom det att lärare arbetar kollegialt men att de inte fick ta del av kompetensutveckling, på grund av vad lärarna benämnde som ekonomiska åtstramningar. De framförde att kompetensutveckling i kombination med kollegialt lärande var ytterst önskvärt. I sådana situationer anser vi att lärare får möjlighet att reflektera över sin undervisning samt ta del av fler och nya perspektiv inom ämnesområdet. Det är i överensstämmelse med vad Penngård (2019), i sin studie, uppmuntrar lärare till att göra för att bidra till deras egen utveckling av PCK.

I vårt resultat framgick erfarenhetsaspekten som en central faktor för användning av representationsformer, vilket å ena sidan inte framkom lika tydligt i tidigare forskning om matematiska representationsformer. Å andra sidan framkom erfarenhet som en viktig aspekt i tidigare forskning gällande lärares utveckling av PCK (Li & Copur-Gencturk, 2024; Schiering et al., 2022). Fyra av fem lärare uttryckte att de hade lång erfarenhet och därmed god tilltro till sig själva att använda representationsformer i undervisningen. L3 uttryckte dock att hans brist på yrkeserfarenhet (se Tabell 1) påverkade tilltron till att använda representationsformer på ett effektivt sätt som eleverna kan ta till sig. Vårt resultat överensstämmer därmed med tidigare forskning om att lärares erfarenhet är en nyckelfaktor för utveckling av PCK (Schiering et al., 2022). Trots att L3 kan anses besitta lägre PCK, i jämförelse med övriga deltagare i studien, uttryckte hen att elevernas upplevelser av matematiska representationsformer formar det fortsatta användandet. Vi tolkar det som att hen är inlyssnande till vad som verkar fungera och inte. Detta agerande är i överensstämmelse gällande vad Penngård (2019) uttrycker vara ett sätt för att utveckla PCK. Schiering et al. (2022) framförde dessutom att ju högre PCK lärare har, desto viktigare är deras praktiska erfarenhet. Det överensstämmer med vårt resultat, eftersom de yrkeserfarna lärarna återkommande poängterade att deras erfarenhet genererar ett större arkiv med fungerande och gynnsamma pedagogiska strategier, utifrån elevers förkunskaper, förmågor och förutsättningar.

I Stylianous (2010) forskning betonades lärares attityd gällande att matematiska representationsformer är komplexa och krävande, som den avgörande faktorn för användningen av dem. I våra intervjuer framgick det att lärarna hade en positiv attityd till att använda representationsformer, men att användningen kan bli krävande på grund av yttre ramfaktorer. I överensstämmelse med Johnson et al. (2020) samt Amo-Asante och Bonyah (2023) framgick det även i vårt resultat att tillräcklig tillgång till tid och material är grundläggande förutsättningar för att bedriva undervisning med representationsformer. I vår studie framgick det dessutom att klasstorlek är en förutsättning som kan underlätta användningen av representationsformer. Vi anser att detta tydliggörs i en jämförelse mellan de deltagande lärarna. L1 och L4 har god materialtillgång, men stora skillnader i klasstorlek (se Tabell 1). De framförde dock att de använder representationsformer ganska kontinuerligt respektive kontinuerligt i sin undervisning (se Tabell 3). L5 hade däremot bristande materialtillgång och en stor klass, där majoriteten av eleverna är i behov av stöttning. Hen

ansåg att användningen av representationsformer därför kunde bli krävande. Samtidigt ansåg hen att det är en gynnsam pedagogisk strategi att använda, och försökte integrera det i den utsträckning som förutsättningarna möjliggör. Vi anser att detta stärker att materialtillgång är en grundläggande förutsättning, medan klasstorlek är en sekundär förutsättning. Följaktligen kan även L2 och L5 jämföras då båda lärarna har bristande materialtillgång, men L2 har en mindre klass samt ansåg själv ha goda förutsättningar utifrån tidsaspekten. L2 har därmed tid och möjlighet att tillverka eget material till hela klassen. Vi anser att detta stärker att tidstillgång är en grundläggande förutsättning, medan klasstorlek återigen är en sekundär förutsättning.

Nasrun et al. (2021) menar att det är vetenskapligt underbyggt att användning av varierande representationsformer bör ske genom hela grundskolan. I vårt resultat framgår det att lärarna använder varierade representationsformer under hela mellanstadiet samt att de uttryckte en förhoppning om att det även fortsätter användas i högstadiet, vilket avviker från hur den praktiska användningen har visat sig vara i tidigare forskning. I den praktiska användningen av matematiska representationsformer menar Johnson et al. (2020) samt Hurst och Linsell (2020) att ju äldre elever är, i desto mindre utsträckning får de möta och använda fler representationsformer än den symboliska. Vår avgränsning till att intervjua mellanstadielärare har dock medfört att detta inte har undersökts vidare. Vår tolkning är att denna skillnad kan ha uppstått på grund av att matematiklärare i Sverige blir uppmanade i kursplanens syfte, bedömningskriterier för årskurs tre samt betygskriterier för årskurs sex och nio att elever ska representera matematik genom olika uttrycksformer (Skolverket, 2022, s. 54-64). Detta skiljer sig från exempelvis den amerikanska kursplanen, där Stylianou (2010) menar att representationsformer inte är centralt samt att elevers förmåga att använda dem inte bedöms. Utifrån vår studie kan vi dock konstatera att representationsformer är lika viktigt i årskurs fyra som i årskurs sex, även om elever successivt behöver befästa sina kunskaper i den symboliska representationsformen också.

7.3 Studiens bidrag till yrkesprofessionen

Det har varit insikts- och betydelsefullt att få undersöka en pedagogisk strategi som vi finner både intressant och givande för vår framtida yrkesutövning. Vår studie syftade till att underlätta en didaktisk tolkning av rådande styrdokument genom att öka förståelsen för hur mellanstadielärare använder representationsformer och om denna användning påverkar

elevers lärande i matematik, men även sammanställa vilka förutsättningar som krävs för att använda dessa i undervisning. Vår upplevelse är att tidigare forskning huvudsakligen har utgått från ett elevcentrerat perspektiv eller klassrumsobservationer, i en internationell kontext. Det har genererat en brist på forskning som utgår från verksamma mellanstadielärares erfarenhet och perspektiv såväl som en avsaknad av forskning i en svensk kontext. Vår studie kan därmed bidra med relevant, anpassad och tillgänglig information till både blivande och verksamma mellanstadielärare i matematik, vilket även stöttar lärares tolkning av kursplanen i matematik.

Enligt skollagen (SFS 2010:800, 1 kap. §5) ska undervisning bedrivas på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet. Skolminister Lotta Edholm slår fast att lärare måste välja vetenskapligt underbyggda undervisningsmetoder för att stärka och vidareutveckla elevers matematiska kunskaper (Utbildningsdepartementet, 2024). Användning av representationsformer i matematik är en vetenskapligt underbyggd metod. Vår studie kan därför bidra till att stötta lärare att välja en pedagogisk strategi som vilar på vetenskaplig grund och gynnar elevers lärande. Vår ambition är att lärare ska våga använda sig av mer än den symboliska representationsformen, som lyfts i matematikböcker, och därmed investera tid, energi och kunskap i att integrera varierade representationsformer i undervisningen.

Utifrån det teoretiska ramverket PCK har vår studie synliggjort vikten av att kombinera lärares CK och PK för att medvetet undervisa ämnesinnehåll utifrån elevers förutsättningar, förkunskaper och förmågor (Schulman, 1987). Erfarenhet medför att lärare kan göra medvetna val i sin undervisning, vilket även lärarna återupprepade flera gånger i studien. Ytterligare ett unikt kunskapsbidrag med denna studie är, till skillnad från tidigare forskning, att lärare delger sin erfarenhet och synliggör sina perspektiv. Lärare besitter därmed en viktig kunskapsbas som måste få delges och synliggöras genom beprövad erfarenhet, där ramverket PCK underlättar förmedlingen av deras tysta kunskap (Skolverket, 2012).

7.4 Metoddiskussion

Valet av kvalitativ forskningsmetod har medfört att subjektivitet är i fokus, både vid insamlingen och bearbetningen av data, eftersom studien ämnade att undersöka lärares personliga erfarenheter av matematiska representationsformer (Bryman, 2011). I detta avseende är det inte möjligt att genomföra undersökningarna objektivt och därmed bör

resultatet inte användas för en generalisering på samhällsnivå. Resultatet kan istället generera igenkänning mellan lärare, då de kan förstå och relatera till varandras upplevelser (Larsson, 2009). Tilläggsvis är genomförandet av intervjuerna samt tematiseringen och tolkningen av resultatet en subjektiv process (Braun & Clarke, 2006). Vi är väl medvetna om att vår förförståelse har kunnat påverka utfallet av denna process. Det är därför ett medvetet val, i enlighet med vad Christoffersen och Johannessen (2015) uttrycker, att båda skribenterna har genomfört intervjuerna samt kodat, tematiserat och tolkat resultatet tillsammans för att stärka studiens reliabilitet. Vidare är det viktigt, särskilt i en kvalitativ intervjustudie, att besitta ett kritiskt förhållningssätt där vi reflekterar över och motiverar våra beslut för att bevara en transparens (Bryman, 2011).

Vi har valt att genomföra en småskalig studie dels på grund av tidsbegränsningen och dels på grund av vår förhoppning om att bidra med underlag för en storskalig studie. Det finns en medvetenhet om att ett litet urval är en begränsning. Informanturvalet var dessutom en selektiv process (Christoffersen & Johannessen, 2015). Å ena sidan möjliggör detta tillvägagångssätt att säkerställa en heterogen urvalsgrupp. Å andra sidan begränsar detta tillvägagångssätt att undersöka interna skillnader i en homogen grupp. I detta avseende prioriterade vi att undersöka en heterogen urvalsgrupp för att studera ämnesområdet från olika perspektiv, vilket har genererat intressanta nyanser i resultat och slutsats. Nyanserna kan vidare användas som underlag för att utforma en storskalig studie.

Vidare hade observation kunnat vara ytterligare en metod för att undersöka studiens syfte, men valdes bort på grund av begränsat tidsutrymme. Observation är en fördelaktig metod för att vidare studera huruvida lärarnas uttalanden överensstämmer med det praktiska genomförandet, eller inte. En svårighet med att använda intervju som metod i en kvalitativ undersökning är att informanterna kan utforma sina svar utifrån vad de tror att intervjuaren önskar få fram (Christoffersen & Johannessen, 2015). Ytterligare en svårighet med inspelade intervjuer är att informanten kan bli obekvämd av att samtala under inspelning (Bryman, 2011). Vi upplevde dock inte att dessa svårigheter tog sig uttryck, men vi gjorde även medvetna val för att kringgå dem. Intervjuguiden utformades exempelvis för att skapa en trygg atmosfär genom att börja i informantens personliga erfarenheter och sedan successivt djupdyka i studiens kärnområde såväl som att öppna frågor prioriterades för att vi som intervjuare skulle undvika en alltför stor påverkan på informantens svar (Christoffersen & Johannessen, 2015).

7.5 Vidare forskning

Denna studie har genererat flera slutsatser gällande lärares uppfattningar om användningen av matematiska representationsformer. Vidare hade det därför varit intressant att studera elevers uppfattningar om användandet av matematiska representationsformer. För att kunna bedriva undervisning som tillmötesgår elevers förmågor, förkunskaper och förutsättningar, enligt god PCK, är det särskilt viktigt att vara lyhörd för elevers åsikter och behov. Fortsättningsvis framgick det i metoddiskussionen att observation hade varit en god kompletterande metod, vilken framtida forskning hade kunnat bidra med för att generera ett mer heltäckande perspektiv. I kombination med detta hade aktionsforskning kunnat vara en fungerande metodologi, för att forska vidare inom det studerade ämnesområdet likväl för att direkt påverka matematikundervisning i en positiv riktning. Slutligen hade vår småskaliga studie varit intressant att se i storskalig forskning, för att resultera i mer generaliserande slutsatser.

8. Referenser

Amo-Asante, K., & Bonyah, E. (2023). Building students' conceptual understanding of operations on fractions using manipulatives: A junior high school perspective. *Mediterranean Journal of Social & Behavioral Research*, 7(13), 151-159. <https://doi.org/10.30935/mjosbr/13381>

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101. doi: 10.1191/1478088706qp063oa

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (2 uppl.). Liber.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2015). *Forskningsmetoder för lärarstudenter*. Studentlitteratur.

Helenius, O., Rystedt, E., & Trygg, L. (2021). *Representationer, uttrycksformer och begrepp*. Lärportalen, Skolverket. <https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR144107>

Hurst, C., & Linsell, C. (2020). Manipulatives and Multiplicative Thinking. *European Journal of STEM Education*, 5(1). <https://doi.org/10.20897/ejsteme/5808>

Johnson, P., O'Meara, N., & Leavy, A. (2021). Factors supporting and inhibiting teachers' use of manipulatives around the primary to post-primary education transition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(7), 1006-1028, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1736348>

Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalization in qualitative research. *International Journal of Research & Method in Education*, 32(1), 25–38. <https://doi.org/10.1080/17437270902759931>

Li, J., & Copur-Gencturk, Y. (2024). Learning through teaching: the development of pedagogical content knowledge among novice mathematics teachers. *Journal of Education for Teaching*, 50(4), 582-597, <https://doi.org/10.1080/02607476.2024.2358041>

Lindström, G., & Pennlert, L-Å. (2019). *Undervisning i teori och praktik: En introduktion i didaktik*. (7e uppl.). Funder Förlag.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använd tal - en handbok*. Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM).

Nasrun., Sa'dijah, C., As'ari, A.R., & Susanto, H. (2021) Investigation of Students' Skills in Generating Different Representations to Solve Word Problems: A Case Study in an Elementary School in Indonesia. *Ilkogretim Online - Elementary Education Online*, 20(1), 582-591. DOI: 10.17051/ilkonline.2021.01.49

Penngård, E. (2019). Science Teaching Through the Lenses of Students: Lower Secondary School. I E. McLoughlin, O.E. Finlayson, S. Erduran & P.E. Childs (Red.), *Bridging Research and Practice in Science Education: Selected Papers from the ESERA 2017 Conference* (s. 273-284). Springer.

Polly, D. (2015). Examining How Professional Development Influences Elementary School Teachers' Enacted Instructional Practices and Students' Evidence of Mathematical Understanding. *Journal of Research in Childhood Education*, 29(4), 565–582. <https://doi.org/10.1080/02568543.2015.1073198>

Puchner, L., Taylor, A., O'Donnell, B., & Fick, K. (2008). Teacher Learning and Mathematics Manipulatives: A Collective Case Study About Teacher Use of Manipulatives in Elementary and Middle School Mathematics Lessons. *School Science & Mathematics*, 108(7), 313-325. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2008.tb17844.x>

Regeringskansliet. (2024). *Det är dags att stoppa mattekrisen*. Regeringskansliet. <https://www.regeringen.se/regeringens-politik/en-stem-strategi-for-sverige/det-ar-dags-att-stoppa-mattekrisen/>

Schiering, D., Sorge, S., Keller, M.M., & Neumann, K. (2022). A proficiency model for pre-service physics teachers' pedagogical content knowledge (PCK) - What constitutes high-level PCK?. *Journal of Research in Science Teaching*, 60(1), 136-163, <https://doi-org.proxy.mau.se/10.1002/tea.21793>

Schulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Schulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review* 57(1), 1-21.

SFS 2010:800. *Skollag*.

https://www.riksdagen.se/sv/dokument-och-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800/#K6

Skolverket. (2012). *Att se helheter i undervisningen: Ett naturvetenskapligt perspektiv*.
<https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a659cc7/1553964351650/>

Skolverket. (2022). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: Lgr22*.
<https://www.skolverket.se/getFile?file=13074>

Skolverket. (2024). *TIMSS 2023: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*.
<https://www.skolverket.se/publikationsserier/rapporter/2024/timss-2023>

Sokolowski, A. (2018). The effects of using representations in elementary mathematics: meta-analysis of research. *IAFOR Journal of Education*, 6(3), 129-152.
<https://doi.org/10.22492/ije.6.3.08>

Stylianou, D.A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325-343.
<https://doi.org/10.1007/s10857-010-9143-y>

Stylianou, D.A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 265-280.
<https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2>

Utbildningsdepartementet. (2024). *Johan Pehrson och Lotta Edholm kommenterar förbättrade matematikkunskaper*. Regeringskansliet.

<https://www.regeringen.se/pressmeddelanden/2024/12/johan-pehrson-och-lotta-edholm-kommenterar-forbattrade-matematikkunskaper/>

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Vetenskapsrådet.

https://www.vr.se/download/18.68c009f71769c7698a41df/1610103120390/Forskningsetiska_principer_VR_2002.pdf

Vetenskapsrådet. (2024). *God forskningssed*. Vetenskapsrådet.

<https://www.vr.se/download/18.4c9f221a191e4edf9053a474/1727853946433/God%20forskningssed%20VR%202024.pdf>

9. Bilagor

9.1 Bilaga 1

Intervjuguide

Inledande frågor:

1. Kan du berätta kort om din bakgrund/erfarenhet som lärare?
 - a. Hur länge har du arbetat som legitimerad lärare?
 - b. Vilken årskurs arbetar du i nu?

2. Kan du kort presentera klassen/eleverna?
 - a. Klasstorlek
 - b. Klassammansättning, matematikkunskaper
 - c. Arbetsmiljö

Övergångsfråga:

3. Vad är din personliga tolkning/definition av representationsformer i matematikämnet?

Nyckelfrågor:

4. Kan du beskriva din erfarenhet av att arbeta med representationsformer i matematikundervisningen?
 - a. När i din undervisning används det? Genomgångar, eget arbete, grupparbete, i/utanför matteboken?
 - b. Används det kontinuerligt eller icke-kontinuerligt?
 - c. Vilka representationsformer förekommer i din undervisning?
 - d. Vid vilka tillfällen väljer du att använda/inte använda det?
 - e. Hur introduceras eleverna till att använda representationsformer?

5. Hur ser du på att låta elever använda representationsformer i undervisningen?
 - a. Vilka fördelar för elevers lärande upplever du med detta arbetssätt?
 - b. Vilka nackdelar för elevers lärande upplever du med detta arbetssätt?
 - c. Uppmuntras eleverna till att använda det? Förklara!

6. Läroplanen poängterar vikten av differentierad undervisning såväl som att forskning belyser att alla elever lär på olika sätt. Hur arbetar du för att differentiera din undervisning i matematik? (Differentiering innebär att utforma undervisningen på olika sätt, för att anpassa den till elevgruppens behov och förutsättningar.)
 - a. Anser du att användning av representationsformer kan vara ett sätt att differentiera undervisning? Varför/varför inte?

7. Vilken funktion anser du att representationsformer fyller i matematikundervisningen?
 - a. Är mer än en representationsform nödvändig för att förklara/arbete med ett matematiskt begrepp eller problem?
 - b. Upplever du att någon elevgrupp gynnas mer eller mindre vid arbete med representationsformer? Förklara!
 - c. Upplever du att elever är mer aktiva vid arbete med representationsformer och i så fall på vilket sätt? Förklara!

8. Forskning visar att det finns begränsningar för att kunna bedriva undervisning med representationsformer. Vad upplever du vara begränsningar?
 - a. Får ni kompetensutveckling i att förstå/arbete med representationsformer?
 - b. Arbetar ni kollegialt med detta?
 - c. Finns det tillräckligt med resurser för att använda olika representationsformer?
 - d. Upplever du att det är genomförbart i förhållande till tidsaspekten? T.ex. planering, förberedelse, genomförande, osv.
 - e. Upplever du att det är genomförbart i förhållande till läroplanens innehåll?

9. Vilka förutsättningar upplever du att du behöver för att kunna/vilja använda representationsformer i undervisningen?
 - a. Hade du velat arbeta med mer representationsformer? Förklara!

Avslut:

10. Vill du förtydliga, tillägga eller lyfta fram något ytterligare?

9.2 Bilaga 2



På lärarutbildningen vid Malmö universitet skriver studenterna ett examensarbete på avancerad nivå. I detta arbete ingår att göra en egen vetenskaplig studie, utifrån en fråga som kommit att engagera studenterna under utbildningens gång. Till studien samlas ofta material in vid skolor, i form av t.ex. intervjuer och observationer. Examensarbetet motsvarar 15 högskolepoäng, och utförs under totalt 10 veckor. När examensarbetet blivit godkänt publiceras det i Malmö universitets databas MUEP (<http://dspace.mah.se/handle/2043/599>).

20250205

Samtycke till medverkan i studentprojekt

Vi heter Linn Grevstig och Linnea Liljedahl och studerar sista terminen på grundlärarprogrammet årskurs 4-6 på Malmö universitet. Vi tar examen i juni 2025 och skriver därför vårt examensarbete.

Vårt examensarbete genomförs i fördjupningsämnet matematik. Genom kvalitativa intervjuer syftar vi till att undersöka verksamma mellanstadielärares användning av matematiska representationsformer, i relation till elevers lärande och den svenska läroplanen. Vi är intresserade av att få ta del av lärares användning av representationsformer, hur lärare uppfattar att representationsformer påverkar elevers lärande samt vilka förutsättningar de anser att det behövs för att kunna använda representationsformer i undervisningen. Vi har inhämtat skolans godkännande till att genomföra denna studie.

Intervjuerna kommer att spelas in via en diktafon, som tillhandahålls av Malmö universitet, för att sedan transkriberas. Det inspelade och transkriberade materialet kommer att förvaras på Malmö universitets server. Samtyckesblanketterna kommer att förvaras oåtkomligt på Malmö universitet. Privata mobiltelefoner kommer inte att användas för insamling av material. Vid genomförandet av examensarbetet har vi, såväl som vår handledare Nils Ekelund, tillgång till materialet.

Vi följer Vetenskapsrådets forskningsetiska principer (<http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf>). Det innebär bland annat att medverkan baseras på samtycke, vilket när som helst kan återkallas. Alla tillfrågade har rätt att tacka nej till att delta, eller (om de först tackar ja) rätt att avbryta sin medverkan när som helst, utan några negativa konsekvenser. Samtliga deltagare kommer dessutom att avidentifieras i det slutgiltiga arbetet. Det insamlade materialet kommer enbart att användas i den aktuella studien och förstörs i samband med att arbetet godkänns.

.....
Studentens underskrift och namnförtydligande

.....
Studentens underskrift och namnförtydligande

Kontaktuppgifter till studenter:

Linn Grevstig

0709555107

linn.grevstig@gmail.com

Linnea Liljedahl

0733163823

linnea.p.liljedahl@gmail.com

Ansvarig handledare på Malmö universitet:

Nils Ekelund

nils.ekelund@mau.se

Kursansvarig på Malmö universitet:

Pernilla Granklint Enochson

pernilla.granklint-enochson@mau.se

Kontaktuppgifter Malmö universitet:

www.mau.se

040-665 70 00



Information om Malmö universitets behandling av personuppgifter

Personuppgiftsansvarig	Malmö universitet
Dataskyddsbud	dataskyddsbud@mau.se
Typ av personuppgifter	Namn, anteckning av lärandesituation, bild och/eller filmklipp samt ditt samtycke till att Malmö universitet behandlar dessa personuppgifter.
Ändamål med behandlingen	För att möjliggöra undervisnings- och examinationssituationer i skolmiljö för studenter vid Malmö universitets lärarutbildning.
Rättslig grund för behandling	Ditt samtycke.
Mottagare	Personuppgifterna kommer endast användas i utbildningssyfte inom ramen för lärarutbildningen vid Malmö universitet och kommer inte att spridas vidare till någon annan mottagare.
Lagringstid	Malmö universitet kommer spara dina personuppgifter så länge de behövs för ovan angivet ändamål eller till dess att du återkallar ditt samtycke. Efter genomförd kurs/program kommer personuppgifterna att raderas. Malmö universitet kan dock i vissa fall bli skyldiga att arkivera och spara personuppgifter enligt Arkivlagen och Riksarkivets föreskrifter.
Dina rättigheter	Du har rätt att kontakta Malmö universitet för att 1) få information om vilka uppgifter Malmö universitet har om dig och 2) begära rättelse av dina uppgifter. Vidare, och under de förutsättningar som närmare anges i dataskyddslagstiftningen, har du rätt att 3) begära radering av dina uppgifter, 4) begära en överföring av dina uppgifter (dataportabilitet), eller 5) begära att Malmö universitet begränsar behandlingen av dina uppgifter. När Malmö universitet behandlar personuppgifter med stöd av ditt samtycke, har du rätt att när som helst återkalla ditt samtycke genom skriftligt meddelande till Malmö universitet. Du har rätt att inge klagomål om Malmö universitets behandling av dina personuppgifter genom att kontakta Datatillsynsmyndigheten, Box 8114, 104 20 Stockholm.



Samtycke

Härmed samtycker jag till att medverka i ovan beskrivna studentprojekt, samt bekräftar att jag har tagit del av informationen om Malmö universitets behandling av personuppgifter, och Vetenskapsrådets forskningsetiska principer, som säger att

- medverkan baseras på samtycke och detta samtycke kan när som helst återkallas. Alla som tillfrågas har alltså rätt att tacka nej till att delta, eller (om de först tackar ja) rätt att avbryta sin medverkan när som helst, utan några negativa konsekvenser.
- deltagarna kommer att avidentifieras i det färdiga arbetet.
- materialet kommer enbart att användas för aktuell studie och kommer att förstöras när denna är examinerad.¹

Namn:

Namnförtydligande:

Dagens datum:

¹ De forskningsetiska principerna kan du läsa mer om i Vetenskapsrådets skrift *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning* (2002), som du kan finna här: <http://www.codex.vr.se/texts/HSEFR.pdf>