



**MALMÖ
UNIVERSITET**

Lärande och samhälle
Skolutveckling och ledarskap

Examensarbete
15 högskolepoäng, avancerad nivå

Subtraktionssituationer i en läroboksserie

- En specialpedagogisk studie om matematikböckers
inverkan på elevers förståelse av fenomenet subtraktion

Subtraction situations in one textbook series

Robin Rydsten

Speciallärarexamen 90 hp
Matematikutveckling
Slutseminarium 2024-08-26

Examinator: Kristian Lutz

Handledare: Jöran Petersson &
Ann-Louise Ljungblad

Förord

Tre års studier på speciallärarprogrammet mynnar slutligen ut i denna uppsats. En uppsats som gett mig en förståelse för hur jag kan stärka och handleda mina kollegor i deras matematikundervisning. Min förhoppning är att resultatet i studien i slutändan kommer göra någon skillnad för elever som jag möter dagligen på min arbetsplats.

Jag vill rikta ett tack till mina handledare för tankar, idéer och synpunkter som fått mig att reflektera, bearbeta och förbättra. Tack till alla kurskamrater som utmanat mig att möta nya tankar och perspektiv inom professionen. Tack också till min familj som under tre års tid peppat, stöttat, och dessutom serverat mig en kopp kaffe när jag som bäst behövt det.

Abstract

Rydsten, Robin (2024). *Subtraktionssituationer i en läroboksserie - En specialpedagogisk studie om matematikböckers inverkan på elevers förståelse av fenomenet subtraktion*. Speciallärarprogrammet, Institutionen för skolutveckling och ledarskap, Lärande och samhälle, Malmö universitet, 90 hp.

Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att belysa olika modeller av subtraktion i en serie matematikläroböcker för årskurser 1, 3 och 5. Vidare syftar studien att relatera detta till elever i behov av stöd i matematikundervisningen. Studien utgår ifrån följande frågeställningar:

- Med vilken frekvens förekommer uppgifter av typerna *ta bort*, *jämföra* och *utjämna* i en vanligt förekommande matematikläromedelsserie i åk 1, 3 och 5?
- Vilken specialpedagogisk betydelse kan typen av uppgifter och frekvensen av dem få för elever i behov av stöd i matematik och deras matematikutveckling?

Teori

Denna studie utgår från ett salutogent förhållningssätt samt Vygotskijs teorier om mediering i ett specialpedagogiskt perspektiv. Utöver det presenteras teori om lärandeobjektet ur ett variationsteoretiskt perspektiv. De matematiska begrepp som är centrala för studiens frågeställningar är subtraktionssituationerna *ta bort*, *jämföra* och *utjämna*.

Metod

Studien innehåller en dokumentanalys. Tillvägagångssättet liknas vid en kvantitativ innehållsanalys, som i grunden är en objektiv och systematisk metod (Bryman, 2018). Studien använder sig av anpassade Lorenzkurvor för analys av data.

Resultat

Studiens resultat visar i linje med tidigare forskning att den undersökta läromedelsserien medierar en starkt begränsad andel subtraktionsuppgifter med jämförelsesituationer. Studien visar även att de iscensatta lärandeobjekten i läromedelsserien domineras av

subtraktionssituationen *ta bort*. Studiens resultat visar att de undersökta läromedlen inte innehåller en tillräcklig variation av uppgifter för att elever ska kunna urskilja de kritiska aspekterna av subtraktion.

Specialpedagogiska implikationer

Studios resultat visar att antalet lärtillfällen i subtraktionssituationer av *ta bort*-typ är både dominerande i antal och dominerande över tid. Det kan innebära att elever som senare möter andra subtraktionssituationer inte kommer att känna igen dem som subtraktion. Elever i behov av stöd i matematik riskerar att hamna i ytterligare behov om de inte tidigt får goda möjligheter att urskilja centrala kritiska aspekter i grundläggande aritmetik. Enligt ett salutogent perspektiv av det specialpedagogiska uppdraget bör speciallärarens uppdrag främst vara förebyggande. Resultatet av studien ger kännedom om vad en speciallärare behöver komplettera med för elevernas lärtillfällen eftersom bristen på variation av uppgifter blir en riskfaktor i elevernas matematikutveckling.

Nyckelord

Lärandeobjekt, matematikläromedel, mediering, specialpedagogik, subtraktionssituation.

Innehållsförteckning

INLEDNING	7
SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNINGAR	9
FRÅGESTÄLLNINGAR	9
TEORETISK FÖRANKRING	10
SALUTOGENT FÖRHÅLLNINGSSÄTT	10
MEDIERING	11
LÄRANDEOBJEKTET	12
OPERAND	13
SUBTRAKTIONSSITUATIONER	14
<i>Ta bort</i>	14
<i>Jämföra</i>	15
<i>Utjämna</i>	17
SAMMANFATTNING	17
TIDIGARE FORSKNING	19
SUBTRAKTION	19
LÄRTILLFÄLLEN	23
LÄROMEDELSSTYRD UNDERVISNING	24
SAMMANFATTNING	24
METOD	26
URVALSGRUPP	26
AVGRÄNSNINGAR I STUDIEN	26
GENOMFÖRANDE	26
ANALYS OCH BEARBETNING	27
ETISKA ÖVERVÄGANDEN	30
RELIABILITET OCH VALIDITET	30
RESULTAT	31
OM DE ANPASSADE LORENZKURVORNA	31
LÄROMEDEL ÅK 1	32
LÄROMEDEL ÅK 3	34
LÄROMEDEL ÅK 5	35
ÖVER TID	36
SPECIALPEDAGOGISK ANALYS	38
DISKUSSION	41

RESULTATDISKUSSION	41
SPECIALPEDAGOGISKA IMPLIKATIONER	43
BEGRÄNSNINGAR	44
METODDISKUSSION	44
FÖRSLAG PÅ FORTSATT FORSKNING	45
REFERENSER.....	46
BILAGOR.....	49

Inledning

Denna studie syftar till att undersöka eventuella begränsningar i utformandet av subtraktionssituationer i matematikböcker i relation till elever i behov av stöd i matematik. Studien kommer att undersöka hur en vanligt förekommande läroboksserie tränar förståelse för både det dynamiska, unära och det statiska, binära sättet att förstå subtraktion. Forskningsgenomgången handlar dels om fenomenet subtraktion, dels om läroböckers roll i klassrummet samt eventuell påverkan på elevers matematiska förståelse av subtraktion. Teoretiskt utgår denna studie ur ett salutogent (Mittelmark, 2017), sociokulturellt perspektiv (Säljö, 2014) som i samverkan med variationsteori (Holmqvist, 2016) och olika aspekter av subtraktion (Fuson, 1992) utgör det raster som tillsammans med resultatet ligger till grund för diskussionen. Det specialpedagogiska arbetet handlar ur ett salutogent perspektiv i stor utsträckning om att arbeta såväl kompensatoriskt som förebyggande.

I grundskolans tidigare del möter elever aritmetik, framförallt addition och subtraktion. Aritmetik är den del av matematiken som behandlar tal, tals användning och räkneoperationer. I aritmetik ingår de fyra räknesätten, addition, subtraktion, multiplikation och division. Räknesätten tränas ofta var för sig och elever ofta upplever oftast subtraktion som svårare än addition. Under många år har forskare försökt komma fram till vilka de underliggande orsakerna till detta kan vara. Flera studier betonar vikten av att undervisa subtraktion och addition samtidigt, för att eleverna ska se sambandet mellan de båda räknesätten (De Smedt et al., 2010; Selter et al., 2012). Den här studiens fokus riktas framförallt mot subtraktion.

I många klassrum bedrivs matematikundervisning med läromedel som utgångspunkt för undervisningen. Svensk matematikundervisning utmärker sig genom att domineras av enskilt arbete i läroboken (Skolverket, 2012). Då är det viktigt att de läromedel som används också tränar den dubbla förståelsen för subtraktion, det vill säga både den dynamiska och den statiska förståelsen (Xin, 2007). Denna studie kommer att undersöka i vilken omfattning ett vanligt förekommande matematikläromedel för årskurserna 1, 3 och 5 innehåller uppgifter som tränar båda synsätten inom subtraktion.

Subtraktion är tillsammans med addition det allra första räknesättet som elever möter. Problemet är att många elever redan tidigt upplever subtraktion som ett svårt räknesätt. För elever i behov av stöd i matematik fortsätter subtraktion att vara ett svårt räknesätt vilket ofta leder till ytterligare svårigheter längre fram i elevens utbildning (Dowker, 2019). Neuman (2013) beskriver till och med subtraktion som det viktigaste räknesättet. Elever som inte skapar

förståelse för subtraktion i ett tidigt stadiet i sin matematiska utveckling riskerar att hamna i specifika matematiksvårigheter under en stor del av sin skolgång. Det är således särskilt viktigt för elever som riskerar att hamna i specifika matematiksvårigheter att få en god modellering av subtraktion. Subtraktion kan enklast förstås som motsatsen till addition (Selter et al., 2012). De flesta barn lär sig först att räkna uppåt, vilket är den enklaste formen av addition för att sedan lära sig att räkna nedåt, den enklaste formen av subtraktion. Det finns olika sätt att beskriva additions- och subtraktionssituationer. Studien kommer, i likhet med andra studier (Norberg, 2020), utgå till största del från fyra grundläggande sätt att förstå addition och subtraktion som presenteras i Fusons (1992) omfattande forskning. De fyra grundläggande sätten att förstå addition och subtraktion är; *jämföra* (compare), *kombinera* (combine), *lägga ihop* (change add to), och *ta bort* (change take from). Av dessa tillhör *jämföra* och *ta bort* subtraktionssituationer, och *kombinera* och *lägga ihop* hör till additionssituationer. Denna studie tar utgångspunkt ur ett salutogent perspektiv (Mittelmarm, 2017) i en strävan efter ny kunskap som kan stödja hur speciallärare kan förebygga att matematiksvårigheter uppstår. Syftet tar avstamp i tidigare studier som visar på dels vikten av att träna subtraktionsstrategier, dels läroböckers påverkan på svensk matematikundervisning. Studien utgår från hypotesen att matematikläromedel har ett begränsat innehåll. Avsikten med studien är att undersöka eventuella begränsningar i matematikböcker, samt dess inverkan på grundläggande matematisk förståelse för elever i behov av stöd i matematik. Studien syftar till att medvetandegöra lärare, speciallärare, specialpedagoger, rektorer och läromedelsförfattare om matematikböckers begränsningar i relation till elever i behov av stöd i matematik. Mellan 15% och 20% av populationen uppskattas vara i behov av stöd i matematik (Dowker, 2019). Elever i behov av stöd i matematik refererar till de elever som uppvisar svårigheter inom någon del av sådan matematiskt aritmetisk beräkning som eleven möter och har behov av att klara av för antingen sin utbildning eller i sin vardag. Med den inramningen av elever i behov av stöd i matematik ingår således en stor grupp elever. Grovt generaliserat innebär det att i en klass om 25 elever kan upp till 5 elever vara i behov av stöd i matematik. Studien är viktigt ur ett specialpedagogiskt perspektiv. Lärare och speciallärare behöver vara medvetna om innehållet i det läromedel som används i undervisningen så att de kan tillföra de delar av matematiken som inte finns med i läromedlet i sin undervisning. Strävan är att förebygga eventuella matematiska missuppfattningar eller låsningar för elever i behov av stöd eller som kan göra att elever blir i behov av stöd senare under sin utbildning. Forskning visar att en stor del av de missuppfattningar och svårigheter som vissa elever hamnar i kan förebyggas genom tydligare didaktiska modeller i undervisningen (Fuson, 1992).

Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att belysa olika modeller av subtraktion i en serie matematikläroböcker för årskurser 1,3 och 5. Vidare syftar studien att relatera detta till elever i behov av stöd i matematikundervisningen. Studien utgår ifrån följande frågeställningar.

Frågeställningar

- Med vilken frekvens förekommer uppgifterna av modeller *ta bort*, *jämföra* och *utjämna* i en vanligt förekommande matematikläromedelsserie i åk 1, 3 och 5?
- Vilken specialpedagogisk betydelse kan typen av uppgifter och frekvensen av dem få för elever i behov av stöd i matematik och deras matematikutveckling?

Utifrån ett salutogent perspektiv söker studien således ny kunskap om hur speciallärare kan förebygga uppkomsten av matematiksvårigheter genom att tillföra till undervisningen det matematiska innehåll som saknas i matematikboken.

Teoretisk förankring

Denna studie tar utgångspunkt ur ett sociokulturellt perspektiv i Vygotskijs (Säljö, 2014) teorier om mediering i ett specialpedagogiskt perspektiv. Studien utgår även från ett salutogent förhållningssätt (Mittelmark, 2017) i ett specialpedagogiskt förebyggande arbete. Därutöver presenteras teori om lärandeobjektet ur ett variationsteoretiskt perspektiv. Dessutom innehåller kapitlet en teoretisk ansats att förklara matematiska begrepp och däri presenteras subtraktionssituationerna *ta bort, jämföra och utjämna* samt de operander som används inom subtraktion. Detta teoretiska raster används för analys av data samt presentation av studiens resultat. Kapitlet är indelat i följande rubriker; *Salutogent förhållningssätt, Mediering, Lärandeobjektet* samt *Subtraktionssituationer, Ta bort, Jämföra* och *Utjämna*, följt av en avslutande *Sammanfattning*.

Salutogent förhållningssätt

Studien tar utgångspunkt ur ett salutogent förhållningssätt (Mittelmark, 2017). Ur ett salutogent förhållningssätt läggs fokus på det friska istället för det sjuka i individen. Det salutogena lyfts således fram i stället för det patogena. I skolsammanhang leder det till en elevsyn där utgångspunkten är att bygga lärande utifrån elevernas styrkor. Elevernas erfarenheter och tidigare kunskaper blir centrala för vidare lärande. Ett salutogent förhållningssätt är exempelvis centralt i det formativa förhållningssätt som läroplanen bygger på (Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, 2022). Ur en specialpedagogisk synvinkel innebär det exempelvis att lyfta blicken från elevens svagheter och istället se eleven i sitt sammanhang. Det specialpedagogiska arbetet ändras från att kartlägga elevens bristande förmågor och träna dem isolerat till att istället arbeta förebyggande med att exempelvis förändra lärmiljön och använda kompensatoriska verktyg för att låta elever komma vidare i sitt lärande. En central tanke i ett salutogent förhållningssätt är känslan av sammanhang (Mittelmark, 2017).

För att eleven ska få en känsla av sammanhang i sin skolgång behöver alla delar av skoldagen kännas hanterbara, meningsfulla och begripliga. Den specialpedagogiska implikationen av en sådan tanke är att låta eleven stanna i sitt sammanhang så gott det går. Istället för att ta ut eleven ur klassrummet så stannar eleven kvar i ett sammanhang och får stöd där. Det specialpedagogiska arbetet handlar i stor utsträckning om att arbeta såväl kompensatoriskt som förebyggande (Jensen, 2017).

Att identifiera delar av undervisningen som kan leda till framtida missuppfattningar eller svårigheter blir således en viktig del av det specialpedagogiska arbetet. I det specialpedagogiska arbetet ingår att identifiera styrkor hos eleven och i verksamheten, så kallade friskfaktorer (Mittelmark, 2017). Friskfaktorer ska byggas vidare på för att stärka både elev och verksamhet. Arbetet innebär också att identifiera vad hos eleven eller i verksamheten som utgör en risk för elevens lärande eller känsla av sammanhang. Arbetet präglas av att identifiera friskfaktorer och riskfaktorer. Genom att identifiera vilka riskfaktorer som utgör hinder i verksamheten kan de ofta vändas och istället bli friskfaktorer.

För att kunna förebygga elevers missuppfattningar i matematik behövs kännedom om vad det är som orsakar missuppfattningar. Men även i det åtgärdande specialpedagogiska arbetet behövs kännedom om vilka kunskapsluckor som orsakat missuppfattningarna (McIntosh, 2020). Genom en förståelse för vilka kunskapsluckor undervisningen orsakar så kan missuppfattningar förebyggas på grupp- och individnivå. Kunskapsluckor och missuppfattningar kan då förebyggas genom både förändrad undervisning och genom tidiga insatser på individnivå. Ett förebyggande arbete är således en förutsättning för ett salutogent förhållningssätt i skolans verksamhet som kan leda till en ökad kunskapsinhämtning hos elever.

Mediering

Studien utgår även ifrån ett sociokulturellt perspektiv (Säljö, 2014). I enlighet med ett sociokulturellt perspektiv förutsätter studien att all kunskap sker genom mediering. Mediering fungerar som ett raster mellan människan och världen utanför. Det är genom mediering som människor förstår olika företeelser i sin omgivning. Mediering konstituerar således företeelser för människor. Mediering kan ske genom ett talat språk, men det kan också ske genom fysiska redskap, så kallade *artefakter*. Centralt i det sociokulturella perspektivet är att lärande inte sker isolerat inom individen utan i samspelet med andra människor och artefakter. Mänskligt skapade redskap är artefakter som människor samspekar med. Människor samspekar alltid med de artefakter som finns runt omkring dem (Säljö, 2014). Artefakter är rent av centrala i människans förståelse för världen. Människor tänker med och genom intellektuella och fysiska redskap. Artefakter förändras över tid. Nya artefakter uppfinns och gamla utvecklas. I takt med det förändras även hur kunskap konstitueras av människor. Hur företeelser konstitueras beror alltid på genom vilket system som de medieras. En människas förståelse för längd beror exempelvis på vilket längdsystem människan är bekant med, meter eller tum. I skolan används mediering och artefakter hela tiden. Mediering byggs in i artefakter som sedan omger eleven i

förhoppning om att eleven ska konstituera specifika företeelser. Specialpedagogik lägger särskilt stor vikt vid artefakter och mediering. I det specialpedagogiska arbetet presenteras ofta konkret material som skapats med stor omsorg om att förmedla ett specifikt lärande. Läroböcker är också artefakter som medierar kunskap. Kunskap kan exempelvis medieras genom att illustreras i bild. Genom att mediera företeelser i olika former, med olika bilder, kan elever uppfatta avgörande skillnader hos företeelser. Läromedelsförfattaren har medierat ett antal modeller som konstitueras av eleven. Det är samspelet mellan lärobok och elev som är särskilt relevant för den här studien. Studien utgår från att de undersökta matematikböckerna är kodade med ett lärande som ska avkodas hos eleven. Matematikboken är en artefakt genom vilken eleven uppfattar matematiska företeelser. I studien är det specifikt mediering av olika modeller av subtraktion som studeras.

Lärandeobjektet

Studien tar också avstamp i en variationsteoretisk kontext (Holmqvist, 2006). Variationsteori utgår från att lärande inte kan ske utan jämförelse. Det är när *lärandeobjektet*, det fenomen som ska läras, jämförs i olika sammanhang som det kan urskiljas. En stol kan till exempel se ut på en mängd olika sätt. Endast genom att observera många olika stolar kan de gemensamma dragen bli tydliga och förståelse för fenomenet *stol* skapas. Inom variationsteori är det således särskilt viktigt att få syn på vad som faktiskt utmärker ett lärandeobjekt. Att ha kännedom om de utmärkande dragen, eller de *kritiska aspekterna*, av ett lärandeobjekt gör att läraren kan visa eleverna olika varianter av objektet och samtidigt belysa de kritiska aspekterna. I arbete med barn i behov av stöd blir detta särskilt viktigt. Att ha god kännedom om de kritiska aspekterna inom olika matematiska områden är viktigt för att kunna reparera kunskapsluckor hos elever men framför allt för att kunna förebygga att elever hamnar i matematiska missuppfattningar eller saknar kritisk förståelse för begrepp.

Variationsteori är också central inom Learning study. Learning study är en modell för att utveckla lektioner och lärande för elever. I Learning study avgränsas först ett lärandeobjekt. Sedan identifieras de kritiska aspekter som hör till lärandeobjektet och därefter utformas lektioner. Lektionen utformas med avsikt att eleven ska lära sig ett särskilt fenomen. Det finns således ett *intentionellt lärandeobjekt* (Holmqvist, 2006) för lektionen. Lärandeobjektet medieras genom undervisningen och blir ett *iscensatt lärandeobjekt*, för att sedan landa hos eleven. Där avkodas budskapet och blir till ett *erfaret lärandeobjekt*. Begreppen inom variationsteori och Learning study fungerar väl för att beskriva samspelet mellan elev och

matematikbok. I matematikboken har läromedelsförfattaren avgränsat ett antal lärandeobjekt. Lärandeobjektens kritiska aspekter har identifierats och ligger till grund för det urval av uppgifter som eleven möter i matematikboken. Läromedelsförfattaren har alltså skapat ett läromedel med intentionella lärandeobjekt. Läromedlet som ur sociokulturell synvinkel blir en artefakt innehåller iscensatta lärandeobjekt som medieras till eleven. Det lärande som sedan sker i samspelet mellan eleven och läroboken blir till erfarna lärandeobjekt och blir en del av elevens kunskapsbank.

Studiens avsikt har varit att fånga upp de iscensatta lärandeobjekt som matematikboken innehåller. För studien gäller också att de uppgifter som har granskats är tolkade utifrån det sammanhang de finns i boken. Studiens kodningsmanual bygger på att uppgifter sorteras in efter en tolkning av det sammanhang de matematiska operationerna befinner sig i. Varje uppgift har bedömts tillhöra en särskild subtraktionssituation utifrån den kontext den befinner sig i. De subtraktionssituationer som beskrivs nedan utgör i variationsteoretisk kontext de kritiska aspekter som gör att elever kan få förståelse för fenomenet subtraktion som helhet. Liksom fenomenet att ett glas kan se ut på många sätt men ändå vara ett glas, så kan en operation inom subtraktion se ut på olika sätt men ändå vara subtraktion. För att skapa rika erfarenheter av ett lärandeobjekt behöver en elev se en mängd olika glas för att få en förståelse för vad det är som utmärker ett glas, på samma sätt behöver elev få syn på en mängd olika former av subtraktion för att få förståelse för hela innebörden av lärandeobjektet subtraktion.

Operand

Matematik innehåller en omfattande terminologi som inte alltid är självklar och som dessutom är olika mellan traditioner och länder. För en tydlig förståelse av studiens terminologi kommer här att presenteras några grundläggande begrepp för subtraktion som är viktiga för att kunna ta del av studien som helhet.

Alla matematiska operationer innehåller *operander* (Frisk, 2009). Det är operandernas förhållande till varandra som beräknas enligt olika räknesätt. Inom subtraktion presenteras operanderna i svenska läromedel oftast som *termer*. I uttrycket $5-3=2$ är således talen 5 och 2 *termer* och skillnaden dem emellan kallas *differens*. I engelskspråkiga läromedel har operanderna inom subtraktion olika namn. Det tal som dras ifrån eller subtraheras kallas för *subtrahend* och det tal som var från början kallas för *minuend*. Skillnaden mellan talen kallas även i engelskspråkig litteratur för differens. I operationen $5-3=2$ är således talet 5 minuend, 3 är subtrahend och 2 är differens. Begreppen minuend och subtrahend används inte särskilt

mycket i svensk litteratur men begreppen finns även på svenska. Begreppen används mer specifikt inom matematikdidaktisk litteratur som exempelvis *Nämnan* (Kilhamn, 2020). Studien kommer att använda sig av begreppen minuend och subtrahend för den anledning att de ger en tydligare förklaring av vilken operand som avses. Begreppet term kan inom subtraktion betyda antingen det tal som ska dras ifrån eller det tal som ska minskas, medan minuend alltid betyder det tal som minskas och subtrahend alltid det som dras ifrån.

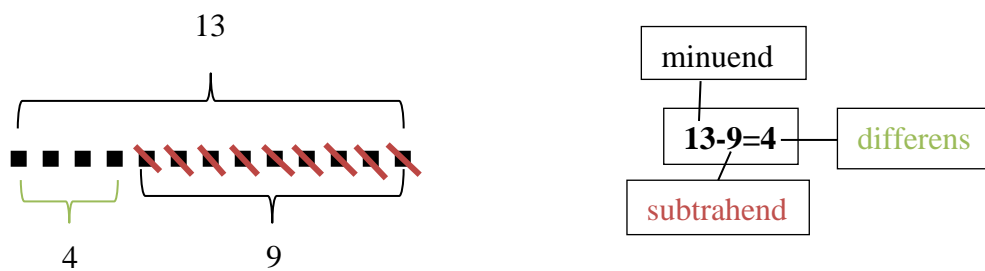
Subtraktionssituationer

Enligt Fuson (1992) finns det olika sätt att beskriva additions- och subtraktionssituationer. De båda räknesätten är tätt sammankopplade men kan beskrivas på 4 grundläggande sätt: *lägga ihop* (change add to), *kombinera* (combine), *ta bort* (change take from) och *jämföra* (compare). Av dessa 4 tillhör lägga ihop och kombinera additionssituationer, medan ta bort och jämföra hör till subtraktionssituationer. Eftersom den här studien riktar sig mot subtraktion kommer endast ta bort och jämföra att förklaras utförligare, tillsammans med en kombination av de båda som benämns utjämna (equalize). Subtraktioner delas då in i någon av följande tre modeller, ta bort (figur 1), jämföra (figur 2) och utjämna (figur 3). De tre subtraktionsbegreppen beskrivs utförligare under respektive underrubrik med tillhörande figur. De exempel som konstruerats i figur 1, 2 och 3 är utformade enligt variationsteoretisk modell. Figureerna ämnar belysa endast de kritiska aspekterna av varje subtraktionsmodell varför de i övrigt ser likadana ut. De utgår alla från samma operation, $13-9$, och är alla jämförelser av mängd.

Ta bort

Det enklaste sättet att förstå subtraktion är genom att ta bort, vilket är den modell som kallas för en ta bort-situation (Fuson, 1992). Figur 1 nedan visar hur en ta bort-situation kan demonstreras. Från en mängd om 13 enheter tas 9 enheter bort. Kvar blir då 4 enheter. Det finns framför allt två kritiska aspekter som beskriver ta bort-situationen. Till att börja med så kan den beskrivas som *unär*, det innebär att situationen utgår från endast en mängd enheter. I det här fallet är det 13 enheter från början. Av de 13 enheterna tas sedan 9 enheter bort. I figur 1 markeras de 9 borttagna enheterna med röda streck. Efter att 9 enheter har tagits bort från mängden 13, återstår 4 enheter. Mängden 13 har således förändrats och blivit mängden 4. Den här förändringen gör att operationen blir *dynamisk*. Ta bort-situationer är således unära och dynamiska. De utgår från en mängd som förändras och blir till en ny mängd. Ta bort-principen är ett effektivt räknesätt i de fall subtrahenden är liten, som i exempelvis $12-4$, men den blir

mindre effektiv i de fall subtrahenden ligger nära minuenden, när differensen är liten, som i till exempel 12-9.

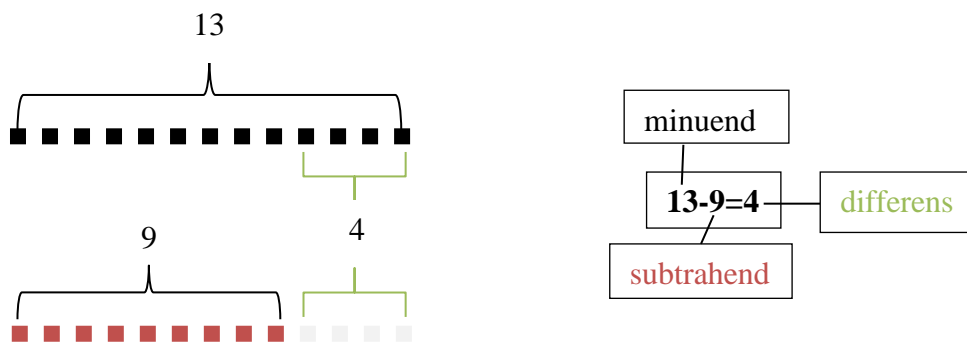


Figur 1. En unär, dynamisk **ta bort-situation**. Fritt efter Fuson (1992, s. 245).

Det råder stor samstämmighet inom matematikforskning att ta bort-modeller är det vanligaste sättet att förklara subtraktion. Det gäller över stora delar av världen (Fuson, 1992; Selter et al., 2012; Murdiyani et al., 2013). Ta bort-situationer tränas ofta in tills de blir utantillkunskap hos eleven. Liksom många elever tränar på att lära sig ord eller rättstavning i språkundervisning, på samma sätt tränas enkla matematiska operationer in som *talfakta* (Baroody et al., 2016). Talfakta är den matematiska varianten av glosor. När sedan talen blir större och operationerna obekanta kan algoritmer, det som brukar kallas uppställning, användas. Algoritmer är alltså en förlängning av ta bort-situationen (Fuson 1992). Textproblem med ta bort-situationer kännetecknas av synonymer till och varianter på orden ”ta bort” och ”dra ifrån”, som exempelvis ”ger bort” och ”förlorar”.

Jämföra

Figur 2 visar det andra grundläggande sättet att se på subtraktion, som en jämförelse av två tal. Subtraktionssituationen är *binär*, genom att den jämför två mängder (Fuson, 1992). Jämföra skiljer sig på så sätt från ta bort som endast innehåller en mängd. I jämföra-situationer är det inte längre en mängd som beräkningen utgår från utan två mängder som jämförs. Egentligen behöver binära situationer inte alls innehålla någon mängd utan det kan lika gärna handla om en jämförelse av två tal på tallinjen. I figur 2 jämförs mängden 13 med mängden 9.

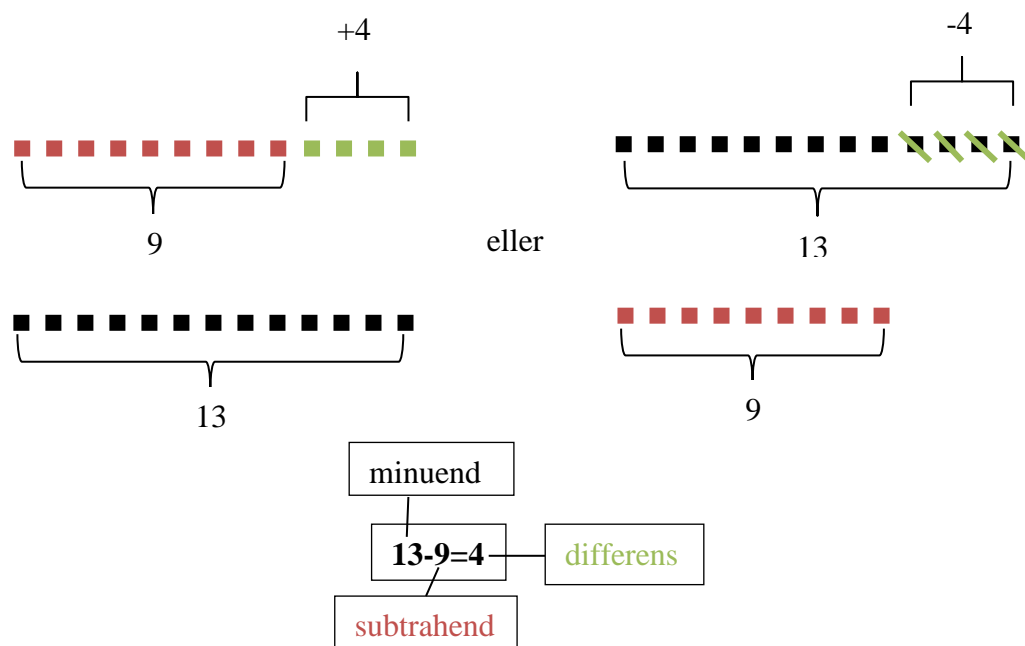


Figur 2. En binär, statistisk *jämförelsesituation*. Fritt efter Fuson (1992, s. 245).

Genom att mängderna placeras parallellt under varandra, med 9 enheter under 13 enheter, så tydliggörs att skillnaden är 4 enheter. Skillnaden kan ses antingen som att minuenden är 4 fler, eller som att subtrahenden är 4 färre. Skillnaden är densamma oavsett. För att operationen ska räknas som en jämföra-situation är det viktigt att det inte sker någon förändring i operationen. Skillnaden konstateras genom en jämförelse utan att något läggs till eller dras ifrån. Operationen är därmed *statisk*. Det sker ingen förändring i beräkningen vilket skiljer jämförelse-situationen från ta bort-situationen. I ta bort förändrades mängden enheter, i jämföra sker ingen förändring. De kritiska aspekterna för jämföra är således att det är en jämförelse av två mängder och att det inte sker någon förändring i operationen. Med andra ord är jämföra-situationer binära och statiska. Att se på subtraktioner som jämföra-situationer är inte lika vanligt förekommande som att se dem som ta bort-situationer (Selter et al., 2012). Den uppenbara fördelen med jämföra-metoden blir tydlig när differensen mellan två tal är liten, men det är också en helt nödvändig metod för att förstå subtraktion inom exempelvis algebra och negativa tal. För att exempelvis kunna förstå varför $10 - (-10) = 20$, kan talen visualiseras på en tallinje. På tallinjen syns det tydligt att avståndet mellan det negativa talet -10 och det positiva talet 10 är 20 . Differensen är därför 20 . När det kommer till ekvationer så är förståelse för det statiska synsättet mycket viktigt (Knuth et al., 2006). Elevers förståelse av statiska operationer ses som central för deras förmåga att förstå ekvationer. En enbart dynamisk förståelse av subtraktion och addition leder till att elever ser på likhetstecknet som en markör för förändring. Vid beräkning av ekvationer är det centralt för förståelsen att likhetstecknet istället ses som en markör för jämlikhet. Elever måste ha förståelse för att förhållanden på båda sidor om ett likhetstecken måste förbli oförändrade.

Utjämna

Förutom de två grundläggande subtraktionssituationerna beskriver forskning dessutom en tredje modell som kallas utjämna. Modellen demonstreras i figur 3. Utjämning kan beskrivas som en kombination av jämföra och ta bort (Norberg, 2020). Utjämningsituationer är binära så till vida att de innehåller en jämförelse av två tal. I figur 3 demonstreras det genom att minuend och subtrahend visas parallellt med varandra, den ena under den andra.



Figur 3. En binär, dynamisk **utjämnings**situation. Fritt efter Fuson (1992, s. 245).

De båda talen utjämnas sedan med en aktiv process genom att enheter läggs till subtrahenden, eller tas bort från minuenden. Å ena sidan kan 4 gröna enheter läggas till de nio som utgör subtrahenden till vänster i bilden. Å andra sidan kan 4 enheter tas bort från minuenden till höger i bilden. De fyra enheterna som tas bort är strukna med grön färg. Processen kan därför anses innehålla en förändring och är därmed dynamisk. En utjämningsituation är alltså binär och dynamisk och det är därför den kan ses som en kombination av ta bort och jämföra. De kritiska aspekterna för utjämningsituationer är därför att de är binära och dynamiska.

Sammanfattning

I kapitlet presenteras teoretiska perspektiv, förhållningssätt och modeller som tillsammans ger det specialpedagogiska raster som ligger till grund för analys av studiens resultat. I kapitlet argumenteras för att ett specialpedagogiskt arbete ur ett salutogent förhållningssätt främst är

förebyggande arbete (Mittelmark, 2017). I ett förebyggande arbete blir didaktiska kunskaper om hur elever lär utan att skapa framtida missuppfattningar särskilt viktiga. Ur ett långsiktigt perspektiv blir de elever i behov av stöd som behöver explicit undervisning av speciallärare i ett sådant arbete färre. För att klargöra matematikbokens roll i elevens lärande så diskuteras begreppet mediering ur ett sociokulturellt perspektiv (Säljö, 2014). Genom den mediering som sker mellan artefakt och elev får eleven förståelse för ett lärandeobjekt. Matematikboken är en artefakt i matematikundervisningen och medierar matematiska fenomen till eleven. I linje med det sociokulturella perspektivet behandlas även hur studien förhåller sig i en variationsteoretisk kontext (Holmqvist, 2006). Det variationsteoretiska lärandeobjektet fungerar väl som förklaringsmodell för studiens ansats och vidare teoretiska förklaring av det matematiska innehållet. I kapitlet presenteras utförligt teoretiska begrepp som ramar in det matematiska område som studien behandlar: ta bort, jämföra och utjämna (Fuson, 1992). Den första teoretiska modell som presenteras handlar i grunden om att å ena sidan se en subtraktion som en operation där svaret motsvarar en förändring i ett tillstånd. I den andra modellen kan man se subtraktionen som en operation där skillnaden hela tiden förblir oförändrad. Den tredje modellen, utjämna, är en kombination av ta bort och jämföra. Alla subtraktionssituationer kan förklaras som antingen ta bort, jämföra eller utjämna. Sammantaget ger det teoretiska kapitlet underlag för såväl analys av studiens resultat som förståelse för uppsatsens teoretiska ingång samt dess centrala begrepp.

Tidigare forskning

I detta kapitel presenteras tidigare forskning om matematikundervisning och subtraktion med fokus på specialpedagogisk problematisering. Här presenteras centrala begrepp som förekommer i tidigare forskning. Studien kommer använda sig av svenska översättningar av de engelska begrepp som används i originalstudierna. För att tydliggöra vilka engelska begrepp som översättningarna syftar på kommer det engelska begreppet att presenteras tillsammans med översättningen första gången det skrivs ut. Därefter kommer endast den svenska översättningen att användas. Kapitlet är indelat i följande rubriker; *Subtraktion*, *Lärtillfällen*, *Läromedelsstyrd undervisning*, *Specialpedagogiska perspektiv* och *Sammanfattning*.

Subtraktion

Forskning lyfter fram framför allt två olika strategier för barn att lära sig enkla aritmetiska operationer (Baroody et al., 2016). Antingen kan operationerna läras in som direkta talfakta eller så kan eleverna lära sig effektiva strategier för att lösa uppgifter. Att träna in talfakta är det vanligaste sättet att undervisa subtraktion i skolan och det kan vara effektivt för många elever så länge de håller sig till subtraktioner inom lägre talområden och välbekanta subtraktioner. Studier visar på vikten av att kunna växla mellan matematiska strategier för att effektivt beräkna problem (Fuson et al., 1997). Detta gäller särskilt för elever i behov av stöd. Förmågan att växla mellan strategier anses av många vara den viktigaste förmågan för en framgångsrik matematiker (Dowker, 2019). För att stödja elever i behov av stöd i matematik och deras matematikutveckling behöver således tid även läggas på att undervisa matematiska strategier. Subtraktion upplevs av många barn som ett svårare räknesätt än addition. Det beror enligt Frisk (2009) på att det finns många olika sätt att tänka på vid räkning av subtraktion. Barn uppmuntras tidigt oftare att räkna uppåt på tallinjen än neråt vilket också bidrar till att det blir mer intuitivt för barn att räkna addition jämfört med subtraktion (McIntosh, 2020). Inom subtraktion finns i huvudsak tre synsätt som elever behöver för att utveckla strategier för beräkning av subtraktion (Fuson, 1992). Synsätten förklaras och presenteras närmre i teoriavsnittet. Förståelse för alla tre synsätten inom subtraktion ger elever möjligheter att utveckla framgångsrika strategier för att längre fram i sin utbildning beräkna obekanta och mer avancerade operationer inom subtraktion.

Forskningen lyfter i synnerhet fram *omvänd addition* som en framgångsrik strategi för subtraktionsberäkning (Baroody et al., 2016). Det är en strategi där eleven räknar ut skillnaden

mellan två tal genom att använda addition. Det finns gott om forskning som visar på fördelar med att använda omvänd addition. Det finns inget samlat begrepp i forskningen för omvänd addition, utan det används flera olika. Ofta benämns strategin som *indirect addition strategy* (Hickendorff 2020; Murdiyani et al.2013), *subtraction by addition* (Peters et al. 2012), *subtraction as addition* (Baroody et al., 2016) och *determining the difference* (Selter et al., 2012). Gemensamt för alla begreppen är att de beskriver sätt att räkna uppåt från subtrahenden, till dess att man når minuenden. Studierna beskriver alla stora fördelar med omvänd addition när det kommer till beräkning av obekanta tal och subtraktion av flersiffriga tal. En nederländsk studie (Hickendorff, 2020) visar exempelvis att när det kommer till flersiffriga subtraktionsproblem så presterar elever som använder sig av omvänd addition, betydligt bättre än de som inte använder sådana strategier.

Även om Baroody et al. (2016) visar att de elever som använde sig omvänd addition presterade bättre än båda kontrollgrupperna, så finns det inget tydligt empiriskt material för att träning av alternativa strategier tidigt i grundskolan skulle vara framgångsrikt (Selter et al., 2012). Studier från såväl Hickendorff (2020) som De Smedt et al. (2010) visar att det är svårt att få elever att vara adaptiva i sina val av strategier. Trots insatser för att träna elever att använda alternativa strategier håller de flesta elever kvar vid ett sätt att räkna trots att de behärskar strategier som hade varit effektivare att använda. Baroody (2016) menar att det handlar om svårigheter i att generalisera de strategier som eleverna lärt sig. Problemet är att i mötet med obekanta operationer faller elever tillbaka i strategier som de memorerat och är vana vid att använda. Murdiyani et al. (2013) visar på viss framgång med ett arbetssätt som benämns Realistic Mathematics Education. Studien undersöker hur praktiskt arbete med pärlor på ett armband kan kopplas till arbete med tallinjen för att främja användandet av olika strategier vid beräkning av subtraktion. Efter en period av cirka 3 månader visade studien att eleverna i större utsträckning anpassade subtraktionsstrategi efter lämplighet. Ytterligare arbetssätt för att träna elever i att växla mellan strategier skriver Fuson et al. (1997) om. Såväl beräkning med hjälp av fingrarna som arbete med tallinjen lyfts fram. Matanovic och Ohlssons (2021) studie visar att lärarens visualisering av matematiska problem har inverkan på hur elever tar till sig matematikinnehåll. Studien visar att lärare oftast uppfattar en tydlig visualisering av matematikinnehåll som effektivare än laborativt arbete med praktiskt material. Lärarna uppfattar att tydliga presentationer och bilder ger eleverna mer förståelse för matematiska strategier jämfört med när eleverna själva ska upptäcka strategier med hjälp av praktiskt material som tiobasmaterial eller kulramar. Studierna bekräftar således Bruners (1966) teori om hur matematisk förmåga behöver gå från konkret arbete till att avbilda representationer av det

konkreta innan elever kan förstå abstrakta begrepp, särskilt elever i behov av stöd. Fuson (1992) menar att små barn redan innan skolålder behärskar strategier för addition och subtraktion men att dessa begränsas i skolan. Eleverna tränas tidigt i att använda endast ett fåtal strategier. Att studierna får så olika resultat kan förklaras av att de har olika ingångar och använder olika metoder för att mäta sina resultat. De Smedt (2010) och Baroody (2016) har gjort undersökningar med mer kvantitativa ingångar. I de undersökningarna har elevernas kunskaper mätts med datoriserade test och får strukturerad traditionell undervisning av subtraktion. Murdiyani et al. (2013) har istället gjort en mer kvalitativ ansats där lärarna som deltar i studien reflekterat tillsammans över lektioner och designat nya lektioner efter vad som gav goda resultat. Det är alltså en form av Lesson study som ligger bakom det undersökta arbetet. Lärarna har också uttryckligen arbetat med ett särskilt laborativt material som utgångspunkt. Det skulle kunna tyda på vikten av det handfasta laborativa arbetet i matematikundervisning med elever i behov av stöd. Samtidigt visar flera studier vikten av att undervisa subtraktion och addition samtidigt, för att eleverna ska se sambandet mellan de båda räknesätten och på så sätt ha bättre förutsättningar att använda olika strategier i sin matematik (De Smedt et al., 2010; Selter et al., 2012).

Neuman (2013) visar i sin specialpedagogiska forskning om matematiksvårigheter vilka strategier elever har med sig in i skolans matematikundervisning. Liksom Fuson (1992) menar Neuman (2013) att elever redan har förställningar om aritmetik när de börjar skolan. Neuman beskriver subtraktion som den viktigaste av de fyra räknesätten och vidare att delning av de 10 bastalen i räknesystemet borde vara den tidigaste målsättningen för elever näst efter räkneordens innebörd. Neuman drar slutsatsen att skolans matematikundervisning med fokus på räknande hämmar elevers matematikutveckling. Ytterligare visar Neumans forskning att elever som redan har förståelse för delning av de 10 bastalen har goda förutsättningar att komma vidare i sin matematikutveckling med skolans undervisning, men att elever som inte redan har förståelse för delning av de 10 bastalen ofta hamnar i matematiksvårigheter. De tio bastalen innebär talen 1-10 som alla delas i mindre delar. Exempelvis kan talet 5 delas i 4 och 1, 3 och 2 och så vidare. Elever använder naturligt sina händer och fingrar i sin tidiga matematikutveckling. Människan har en naturlig förmåga att se tal upp till 4 utan att behöva räkna. Den förmågan att kunna se tal tillsammans med vetskap om att fingrarna på den ena handen alltid tillsammans bildar talet 5, gör att elever med hjälp av sina båda händer kan se alla tal upp till 10 utan att behöva räkna fingrarna. Med sina händer som stöd skapar elever förståelse hur alla tal upp till talet 10 kan delas in i olika delar. Efterhand som elever blir säkrare i de här strategierna släpper eleverna fingrarna som stöd och använder istället sig av huvudräkning.

Neuman har i studier kunnat visa att elever som inte redan har förmågan att dela in de 10 bastalen löper större risk att hamna i matematiksvårigheter än elever som har förmågan att dela in tal redan innan de börjar skolan. En anledning till att subtraktion är svårt att lära i skolan, menar Neuman, är att traditionellt används laborativt material som stöd vid räkning i matematikboken istället för händerna vid tidig matematikinläring. Elever tränas dessutom oftast i addition först och subtraktion sedan. De två räknesätten borde undervisas tillsammans, subtraktion och addition samtidigt. Undervisning i skolan borde ta vara på elevernas förståelse för handens femstruktur och bygga vidare på det i tidig matematikinläring. Neuman (2013) skapade också en praktisk studie över två år med en elevgrupp. I studien utvecklades en undervisning som hade till avsikt att ligga så nära elevernas egna erfarenheter av aritmetik som möjligt. I undervisningen uppmuntrades eleverna att själva utveckla matematiska tecken och regler som efterhand kunde ersättas med traditionella tecken. I elevgruppen fanns efter 2 år inte någon elev som var i behov av stöd i matematik.

Forskningen beskriver en överrepresentation av uppgifter av typen ta bort inom tidig subtraktionsinläring hos yngre elever (De Corte & Verschaffel, 1987). Denna överrepresentation bekräftas av flera studier där forskare ber elever förklara hur de löser uppgifter (Baroody et al., 2016; De Smedt et al., 2010). Norberg (2019) gör samma observation inom läromedel, att det finns en överrepresentation av subtraktionssituationer av ta bort-typ. Norberg (2019) undersökte ta bort-situationer och jämföra-situationer i 17 svenska matematikböcker riktade mot åk 1. Resultatet i studien speglar endast övningar som var tydligt förklarade enligt subtraktionssituation och därför blev många övningar kategoriserade som odefinierade enligt subtraktionssituation. Men resultatet speglar trots det en stor överrepresentation av ta bort-situationer.

I en studie av Knuth et al. (2006) som gjordes med elever i årskurs 6, 7 och 8 visar resultatet på ett starkt samband mellan elevers förståelse av likhetstecknet och deras förmåga att lösa ekvationer. Knuth et al. (2006) gör också en koppling mellan elevers ihärdiga förståelse av likhetstecknets dynamiska funktion och den undervisning de möter i sin tidiga skolålder. Norberg (2019) som undersöker matematikläromedel visar i sin studie att 6 av 17 undersökta läromedel i årskurs 1 i Sverige inte innehåller några jämförelse-situationer alls. Av alla undersökta övningar i de 17 läromedel som ingick i studien tränade endast 6% jämförelsesituationer.

Lärtillfällen

Alla tal elever möter i sin matematikundervisning avser att lära eleven en särskild matematisk metod eller modell. Exempelvis framgår det ofta i matematikläromedel i inledningen av kapitlet eller början på sidan vilken metod som avses tränas genom att räkna de följande talen. Alla tal en elev möter i en lärobok innebär således ett lärtillfälle. Likaså innebär varje problem som eleven ställs inför i en laborativ övning i klassrummet ett lärtillfälle. Det är viktigt att skilja på vilka lärtillfällen som läroboken erbjuder och vilka lärtillfällen som elever i behov av stöd möter i sin matematikundervisning (Norberg, 2020). Lärare i matematik kan använda sig av matematikböcker som lärresurser, men har också möjlighet att använda sig av en mängd andra lärresurser i sin undervisning. Det finns en diskrepans mellan vad läroboken avser lära ut genom uppgifterna i matematikboken och vad eleven faktiskt lär sig genom att göra dem. Beatty (1997) använder begreppen *intentionell läroplan* (intended curriculum), *iscensatt läroplan* (implemented curriculum) och *erfaren läroplan* (attained curriculum) för att analysera lärtillfällen i olika länder. Begreppen kan användas för att synliggöra lärandet i läroböcker. Läroböcker påverkas i hög grad av läroplaner och innehållet i matematikläromedel hamnar någonstans mellan den intentionella läroplanen och den iscensatta läroplanen (Törnroos, 2005). Innehållet i läroböcker speglar de nationella riktlinjerna i läroplanen som därför blir den intentionella läroplanen. Innehållet i läroböcker kan användas i klassrummet och blir då den iscensatta läroplanen. Det är dock inte säkert att allt innehåll i matematikboken används i undervisningen och således hamnar innehållet i matematikböcker mellan intentionell läroplan och iscensatt läroplan.

Norberg (2020) beskriver att matematikböcker innehåller ett designat erbjudande av matematikinnehåll, medan Törnroos (2005) beskriver det som lärtillfällen (opportunities to learn). Begreppet lärtillfällen återfinns dessutom i Mullis et al. (2012) rapport som visar på ett samband mellan de lärtillfällen elever möter och deras matematikresultat. Törnroos (2005) studie visar att det finns en korrelation mellan de lärtillfällen som elever erbjuds i matematikböcker och deras matematikresultat i internationella mätningar. Törnroos (2005) kopplar detta till att matematikböcker ofta utgör underlag för det större antalet matematikuppgifter som elever möter i sin matematikundervisning. Den här studien kommer liksom ovan nämnda studier att likställa alla uppgifter i matematikläroboken med lärtillfällen.

Läromedelsstyrd undervisning

En undersökning från 2003 (Hiebert et al.) visar att över 90% av alla matematiklektioner i åttonde klass i 7 olika länder innehöll arbete i matematikböcker eller stenciler. Det kan jämföras med en internationell undersökning (Mullis et al., 2012) där lärare i årskurs 4 skattat hur de använder matematikböcker i sin undervisning. Undersökningen visar att 75% av alla deltagande lärare utgår från läroböcker i sin matematikundervisning. För svenska lärare i studien är siffran så hög som 89%. Svenska lärare använder alltså i hög grad matematikböcker som underlag för sin undervisning, mer så än det internationella genomsnittet. Norge använder matematikböcker i ännu högre utsträckning, 97%. En annan mindre studie av Matanovic och Ohlsson (2021) som undersöker lektionsinnehållets inverkan på elever i behov av stöd, bekräftar bilden av att innehållet i matematikböcker till stor del påverkar innehållet i matematikundervisningen.

Koljonen (2020) jämför i en studie hur svenska och finska lärare använder matematikläromedel i sin undervisning. Resultatet visar att finska lärare använder matematikböcker som en del av sin undervisning men att de framför allt utgår från tillhörande lärarhandledning när de planerar sina lektioner. Svenska lärare utgår i högre grad ifrån innehållet i matematikböckerna när de planerar sin undervisning. Studien visar även att det skiljer sig åt i vilken omfattning svenska och finska lärare planerar sin undervisning. Studien visar att de finska lärarna i högre grad planerade för hela lektionstillfället med fler lärarledda övningar, medan de svenska lärarna planerar för en inledning av lektionen, med en genomgång av innehållet och sedan i större omfattning låter eleverna arbeta individuellt i sina matematikböcker.

Sammanfattning

Tidigare forskning betonar vikten av att få förståelse för subtraktion som räknesätt (Dowker, 2019). Forskningen är samstämmig i att betona vikten för elever i behov av stöd i matematik att utveckla framgångsrika strategier i sitt subtraktionsräknande. För att kunna räkna mer avancerad matematik längre fram under sin skolgång behöver elever förståelse för ta bort-, jämföra- och utjämna-modeller av subtraktion (Fuson, 1992). Forskningen lyfter fram omvänd addition som en särskilt framgångsrik strategi för subtraktionsberäkning (Baroody et al., 2016) Samtidigt visar forskning att elever längre fram i sin utbildning har svårt att använda sig av nya strategier i obekant beräkning av subtraktion (Hickendorff (2020). Studier visar att små barn ofta har flera olika strategier för att beräkna subtraktion men att de begränsas i skolan till att använda endast ett fåtal (Fuson et al., 1997). Forskning visar vidare på en överrepresentation

av strategier enligt ta bort-modeller inom tidig subtraktionsinlärning (Norberg, 2019). Alla uppgifter i matematikböcker anses utgöra lärtillfällen för elever, enligt Törnroos (2005). Vidare kan tre begrepp användas vid analys av lärtillfällen (Beatty, 1997); intentionell läroplan, iscensatt läroplan och erfaren läroplan. Enligt dessa 3 begrepp kan matematikboken analyseras som lärandeverktyg. Forskning visar att svenska lärare i högre grad använder matematikböcker som utgångspunkt för sin undervisning jämfört med ett internationellt genomsnitt (Mullis et al., 2012). Den här studien utgår därför från att de lärtillfällen som erbjuds i matematikläromedel utgör en stor del av de lärtillfällen som elever möter i sin matematikundervisning.

Metod

För att svara mot studiens syfte att undersöka innehållet i ett matematikläromedel, ringa in begränsningen och diskutera dess eventuella inverkan på elevers lärande, undersöker studien frekvensen av olika subtraktionsmodeller i en läroboksserie. För att undersöka de olika subtraktionssituationerna i läroböckerna använder studien en dokumentanalys, som en variant av kvantitativ innehållsanalys. Resultatet redovisas genom att den kumulativa frekvensen åskådliggörs i ett diagram kallad anpassad lorenzkurva (Petersson et al., 2021).

Urvalsgrupp

För studien valdes läromedel för årskurs 1, 3 och 5. Studien hoppas på så sätt även fånga den progression som kan förväntas inom en läromedelsserie. Läromedelsserien valdes ut med tanke på tillgänglighet och lämplighet för nuvarande verksamhet och valet föll således på den finska läromedelsserien Favorit matematik (Studentlitteratur). Favorit matematik är Sveriges mest använda matematikläromedel¹.

Avgränsningar i studien

Urvalet begränsas till att behandla uppgifter som innehåller subtraktion. I böckerna finns något som kallas "Träna-rutor". Dessa används i Finland som läxa och har valts bort i studien. I böckerna finns också diagnoser som benämns "Vad har jag lärt mig?". Dessa har inte tagits med i denna datainsamling.

Genomförande

För att mäta frekvensen av olika subtraktionsmodeller innehåller studien en dokumentanalys (Bryman, 2018). Tillvägagångssättet kan liknas vid en kvantitativ innehållsanalys. Kvantitativ innehållsanalys beskrivs i grunden som en objektiv och systematisk metod som ligger nära ett matematiskt, logiskt tankesätt. Det handlar om att kategorisera data efter i förväg bestämda parametrar. Metoden är transparent och objektiv i och med att det klart och tydligt framgår hur forskaren gör för att hänföra olika delar av ett råmaterial till olika kategorier. Kategorierna behöver vara tydligt förklarade och tillvägagångssättet ska vara konsekvent och systematiskt.

¹<https://app.bwz.se/studentlitteratur/b/m/?l=a13643fd-5b35-4825-b296-c809eacdf6b8&r=24985&rcrc=A014968F>

Metoden ska kunna replikeras med samma resultat av en annan forskare. För att kunna följa studiens systematiska tillvägagångssätt presenteras studiens kodningsmanual. I avsikt att säkerställa reliabilitet i metoden gjordes en pilotstudie där manualen testades, utvärderades och utvecklades.

Kvantitativ innehållsanalys kan användas för att kvantifiera och kategorisera exempelvis observationer eller mängder av tidningsartiklar över tid och hantera stora mängder data. I liknande studier samverkar ofta flera forskare i kodning av råmaterial. När flera forskare samverkar i samma studie blir vikten av interbedömarreliabilitet och intrabedömarreliabilitet tydlig. I den här studien är det inte aktuellt att diskutera interbedömarreliabiliteten eftersom all data är samlad av samma person. Däremot bör det kort diskuteras att liksom vid större studier med kvantitativ innehållsanalys så är det av stor vikt att alla data kodats på ett likartat sätt, intrabedömarreliabilitet. Ju tydligare kodningsmanualen är desto rättvisare blir kodningen av data. Den här studien noterar vikten av att säkerställa att liknande uppgifter bedöms tillhöra samma kategori under hela resultatinsamlingen. Kategorierna är tydligt definierade och avgränsade med en tillhörande tydlig kodningsmanual.

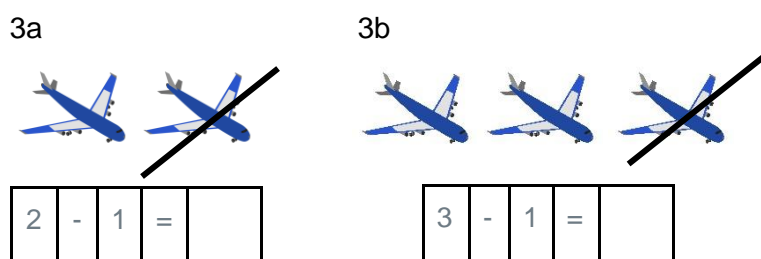
Studien genomfördes genom att varje uppgift i de undersökta böckerna studerades. För det första avgjordes om uppgiften var en subtraktionsuppgift. Endast de uppgifter som ansågs vara subtraktioner analyserades vidare. Övriga matematikuppgifter inkluderades i studiens resultat för att kunna redovisa det totala antalet uppgifter i böckerna. I nästa skede kategoriserades uppgifter enligt någon av de 5 uppgiftstyperna som återfinns inom ta bort, jämföra och utjämna. Varje uppgift har endast kategoriserats som tillhörande en av de 5 kategorierna. Uppgiftstyperna är således ömsesidigt uteslutande då en uppgift inte kan tillhöra två kategorier. Resultatet dokumenterades i Microsoft Excel, som även användes för att utföra beräkningar liksom för att utforma tabeller och diagram.

Analys och bearbetning

Studien skiljer också på hur uppgifterna presenteras i böckerna. I vissa fall visar läromedlet tydligt på vilket sätt uppgifter ska lösas. Lösningarna presenteras ofta med exempel. Boken demonstrerar en lösning av en operation och det framgår tydligt av kontexten hur uppgifterna som följer efter ska lösas. I andra fall presenteras uppgifter utan någon demonstration. Det framgår då av uppgiftens kontext på vilket sätt uppgiften förväntas lösas. Studien skiljer därför på uppgifter med demonstration och uppgifter utan demonstration. Uppgifter med en demonstrerad lösning, kallas uppgifter med demonstrationskontext. De uppgifter där bokens

övriga kontext ger förväntning på lösning kallas för uppgiftskontext. Det gör att för subtraktioner inom ta bort-situationer finns det två olika kategorier, en med demonstrationskontext och en med uppgiftskontext. Likaså finns det två olika kategorier för uppgifter inom jämföra-situationer. Den modell som kallas för utjämna-situation anses inte ha någon egen uppgiftskontext och därför finns den endast kategoriserad ur demonstrationskontext. Figur 4 visar ett exempel på hur en subtraktionsuppgift kan kodas enligt studiens kodningsmall.

Övning 3.



Figur 4. Fritt konstruerat räkneexempel efter Favorit Matematik 1A, upplaga 2 (Ristola, 2018). Bilden på flygplanet är hämtat från Vecteezy²

I figur 4 visas en exempelövning som liknar en övning i Favorit matematik 1A (Ristola, 2018). Exemplet i figur 4 kallas för övning 3. Övning 3 innehåller två uppgifter; 3a och 3b. I både uppgift 3a och 3b framgår med exempel hur uppgiften förväntas lösas. I uppgift 3a är ett flygplan överstruket med ett streck. Jämför med figur 1 i teoriavsnittet. Det tolkas som att uppgift 3a demonstrerar en ta bort-situation. Uppgift 3a kodas därför som en demonstrerad ta bort-uppgift, eller som det kallas i kodningsmanualen ta bort enligt demonstrationskontext. Kodningsmanualen demonstreras i figur 5 nedan tillsammans med ett exempel på hur övning 3 skulle kodas om den ingick i studien.

jämförelse enligt uppgiftskontext	ta bort enligt uppgiftskontext	jämförelse enligt demonstrationskontext	ta bort enligt demonstrationskontext	utjämna enligt demonstrationskontext
0	0	0	1	0

Figur 5. Kodningsmanual för studien.

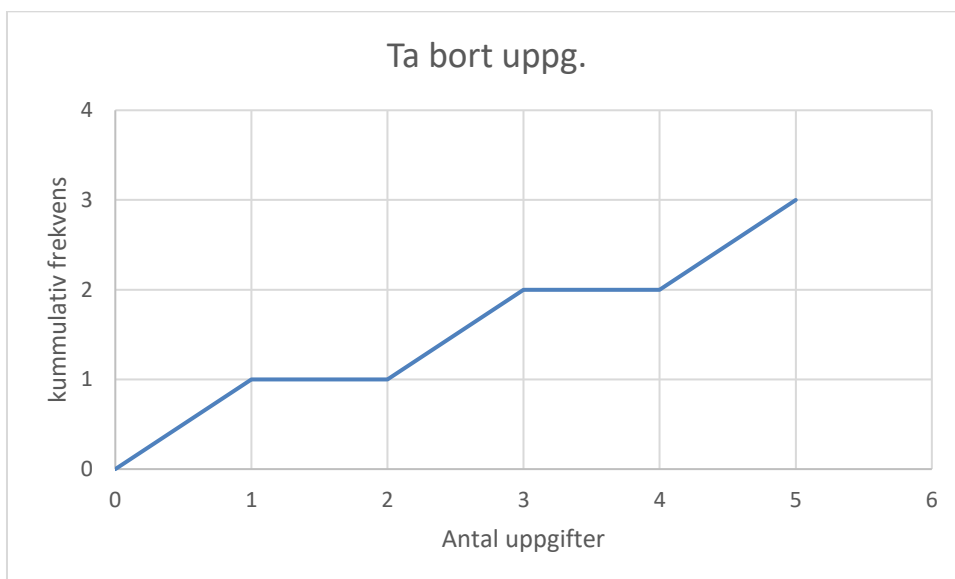
Liksom beskrivet ovan innehåller kodningsmanualen 5 olika kategorier. Övning 3 (figur 4) kodas med 1 i kategorin “ta bort enligt demonstrationskontext” och med 0 i de andra

² <https://sv.vecteezy.com/gratis-vektor/vektor>

kategorierna. Varje uppgift kodas med 1 för den kategori som den faller in under och 0 för de kategorier som den inte faller in under.

Resultatet har analyserats med hjälp av anpassade lorenzkurvor, som skapats i Microsoft Excel. Lorenzkurvan används oftast inom nationalekonomi för att presentera skillnader i inkomstfördelning. Tidigare studier (Pettersson, Sayers & Andrews, 2021) har presenterat en anpassad variant av lorenzkurvan för att åskådliggöra skillnader i förekomst av uppgiftstyper i matematikböcker. Kurvan presenterar då den kumulativa summan av antalet uppgiftstyper i matematikböcker. I det här fallet presenterar kurvan den kumulativa summan av olika typer av subtraktionsuppgifter, enligt kodningsmanualen. Efterhand som uppgifter avkodas bildas en serie av kod för varje kategori. Exempelvis skulle en serie kod, i kategori “ta bort enligt uppgiftskontext”, kunna se ut såhär: 1, 0, 1, 0, 1. Av totalt fem uppgifter är tre av ta bort-typ enligt uppgiftskontext. Dessa tre uppgifterna är nummer 1, 3, och 5 i ordningsföljden. Den kumulativa serien för de 5 uppgifterna presenterade i en lorenzkurva ser då ut såhär: 1, 1, 2, 2, 3. Det betyder att efter första uppgiften finns det 1 ta bort-uppgift. Efter andra uppgiften finns det fortfarande bara 1 ta bort-uppgift. Efter tredje uppgiften finns det 2 ta bort-uppgifter. Efter fjärde uppgiften finns det fortfarande 2 ta bort-uppgifter. Efter femte uppgiften finns det 3 ta bort-uppgifter. Lorenzkurvan presenterar då den ökande förekomsten av uppgifter inom kategorin ta bort enligt uppgiftskontext.

I figur 6 presenteras en bild lorenzkurvan som bildas av de 5 uppgifterna i exemplet ovan.



Figur 6. Exempel på anpassad lorenzkurva

Eftersom den anpassade lorenzkurvan (figur 6) visar en kumulativ frekvens för vald analyskategori, så betyder ett horisontellt streck, en plåtå, att inga uppgifter i just den analyskategorin tillkommer. Ett uppåt sluttande streck betyder att den analyserade egenskapen finns med i uppgifterna. Fördelen med den anpassade lorenzkurvan är att den ger en överblick inte bara över frekvensen av uppgifter samt hur de förhåller sig till varandra och hur ofta de förekommer. Kurvan ger således inte bara en bild av hur många uppgifter av en viss typ som förekommer i boken utan också när den förekommer.

Resultatet har analyserats med stöd av sociokulturell teori och variationsteori med fokus på mediering och lärandeobjekt. Slutligen har en specialpedagogisk analys utifrån ett salutogent perspektiv genomförts med fokus på vilken specialpedagogisk betydelse typen av uppgifter och frekvensen av dem kan få för elever i behov av stöd i matematik och deras matematikutveckling. Analysen är gjord i förhållande till det teoretiska raster som skrivs fram i teori- och forskningskapiteln. Centrala begrepp i analysen är; *mediering, artefakt, fenomen, kritisk aspekt, lärandeobjekt, risk- samt friskfaktor, kompensatorisk, förebygga, känsla av sammanhang, lärtillfälle, ta bort, jämföra och utjämna.*

Etiska överväganden

Eftersom studien är en dokumentanalys så finns inga informanter. Därmed behövs inget medgivande enligt Vetenskapsrådets forskningsetiska principer (2017). Studien har tagit hänsyn till upphovsrätten (Regeringskansliet, 1960) genom att inte använda bilder ur den undersökta läromedelsserien. Studien har istället valt att göra egna framställningar och illustrationer och endast använt bilder med upphovsrättslig tillåtelse och med lämplig referens.

Reliabilitet och validitet

Testresultaten anses reliabla eftersom de går att återskapa av envar som väljer att gå igenom undersökta läromedel. Kodningen förutsätter att uppgifterna kategoriseras enligt samma mönster som studien. Det finns andra sätt att bedöma vissa uppgifter och de skulle då kategoriseras något annorlunda. Detta skulle inte påverka resultatet av studien nämnvärt, då studien har en tydlig teoretisk beskrivning av de teoretiska modellerna inom subtraktion. Studien är gjord enbart med läromedel och litteratur som underlag. Studien bygger på ett antal antaganden om lärande och läromedel. För att få syn på vad eleven verkligen lär sig i förhållande till sin undervisning skulle behöva göras en betydligt större studie med såväl lärar- som elevunderlag.

Resultat

I resultatkapitlet redovisas inledningsvis de anpassade lorenzkurvorna över frekvensen av subtraktionssituationer i de olika matematikböckerna. Därefter redovisas resultatet som en helhet i tabellform. Slutligen görs en analys av resultatet ur ett specialpedagogiskt perspektiv. Då specialpedagogik är tvärvetenskaplig gör studien en teoretisk triangulering i tolkningen av resultatet. Först läggs ett teoretiskt raster av sociokulturell teori, därefter variations teori och slutligen görs en analys med stöd av salutogent perspektiv. I kapitlet återfinns rubrikerna; Om de anpassade lorenzkurvorna, Läromedel åk 1, Läromedel åk 3, Läromedel åk 5, Över tid samt Specialpedagogisk analys.

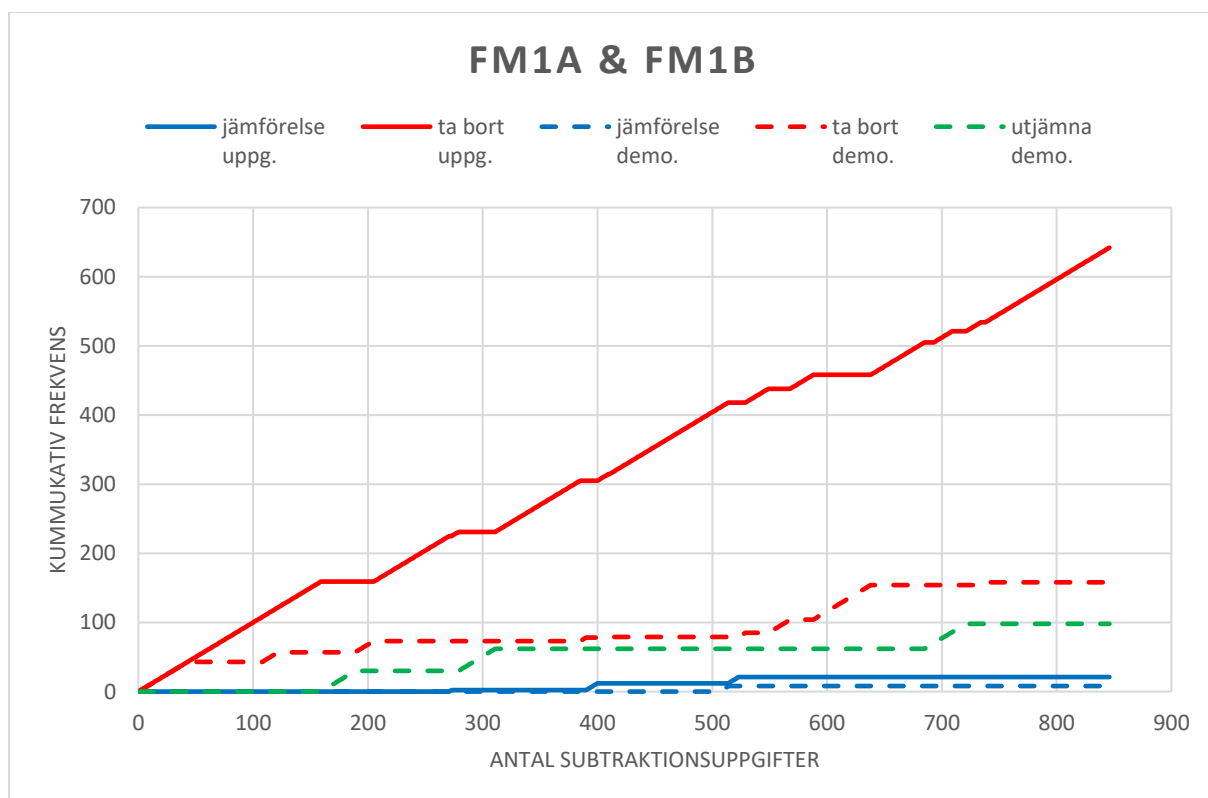
Om de anpassade lorenzkurvorna

Matematikböckerna i studien är tänkta att användas årskursvis i undervisningen. Varje årskurs har två böcker. Exempelvis är Favorit matematik 1A och Favorit matematik 1B tänkta att användas i årskurs 1. Typiskt används Favorit matematik 1A på höstterminen och Favorit matematik 1B på vårterminen. Övriga böcker i serien följer samma mönster. För att göra resultatet överskådligt årskursvis har därför bok A och B i respektive årskurs slagits ihop i lorenzkurvorna. Således presenteras tre olika diagram med lorenzkurvor i resultatet. Figur 7, 8 och 9 föreställer anpassade lorenzkurvor av uppgiftstyper i de undersökta matematikböckerna. Figuren är sorterade så att de visar uppgiftstyp årskursvis. Kurvorna i figuren visar hur olika subtraktionsuppgifter finns representerade i båda böckerna för en årskurs sammantaget i varje figur. Alla uppgiftstyper som finns i kodningsmanualen finns representerad med en egen linje. För att det ska vara lättare att följa vilken linje som hör till vilken uppgiftstyp så är linjerna färgkodade. Ta bort-uppgifter har en röd linje, jämförelse-uppgifter har en blå linje och utjämna-uppgifter har en grön linje. Enligt kodningsmanualen skiljer studien också på uppgifter enligt demonstrationskontext och enligt uppgiftskontextkontext. Därför finns det i figuren två olika röda linjer, en som är hel och en som är streckad. Den hela linjen visar uppgifter enligt uppgiftskontext och den hela linjen visar uppgifter enligt demonstrationskontext. På samma sätt finns det två olika blå linjer, en som är hel och en som är streckad. Däremot finns det endast en grön linje eftersom utjämnauppgifter endast finns enligt demonstrationskontext. Ju längre åt höger kurvan kommer på den liggande axeln i figuren, desto senare i boken förekommer uppgiftstypen. När någon av kurvorna stiger på den uppåtgående axeln så finns uppgiftstypen

representerad. Om kurvan sedan planar ut igen, går in i en plåtå, så finns inte den typen av uppgift representerad längre.

Läromedel åk 1

Figur 7 visar variationen i uppgiftstyp av alla subtraktionsuppgifter i Favorit matematik 1A och 1B (Ristola, 2018).



Figur 7. Anpassad Lorenzkurva för Favorit Matematik 1A & 1B, upplaga 2 (Ristola, 2018).

Ur figur 7 kan utläsas att ta bort-uppgifter enligt uppgiftskontext medieras ganska jämnt under årskurs 1. Det syns genom att den hela röda linjen stiger jämt över hela figuren. Den röda linjen stiger mest i figuren. Det innebär att lärandeobjektet ta bort enligt uppgiftskontext medieras mest av de undersökta uppgiftstyperna. I figuren syns en stor skillnad mellan den hela röda linjen och alla de övriga linjerna. Det betyder att ta bort enligt uppgiftskontext medieras betydligt mer i de två undersökta artefakterna, läromedlen, än övriga subtraktionssituationer. Det mest iscensatta lärandeobjektet som medieras i matematikläroböckerna för årskurs 1 är alltså subtraktionssituationen ta bort.

Den röda streckade linjen i figur 7 visar att lärandeobjektet ta bort enligt demonstrationskontext till en början i böckerna förekommer i samma utsträckning som ta bort

enligt uppgiftskontext. Efter ungefär 100 uppgifter planar den streckade röda linjen ut. Det betyder att ta bort-uppgifter enligt demonstrationskontext knappt medieras mer förrän linjen stiger igen mot slutet av böckerna. Efter ungefär 550 uppgifter i böckerna stiger den röda streckade linjen för att sedan åter gå in i en plåtå efter ytterligare cirka 100 uppgifter. En förklaring till att ta bort uppgifter enligt demonstrationskontext upphör är att det intentionella lärandeobjektet förväntas ha blivit ett erfaret lärandeobjekt efter ett antal uppgifter i början av bok 1A och sedan åter i början av bok 1B. Eleven förväntas därefter ha konstituerat företeelsen ta bort som subtraktionsmodell och således också ha strategier för att kunna beräkna liknande uppgifter utifrån uppgiftskontext.

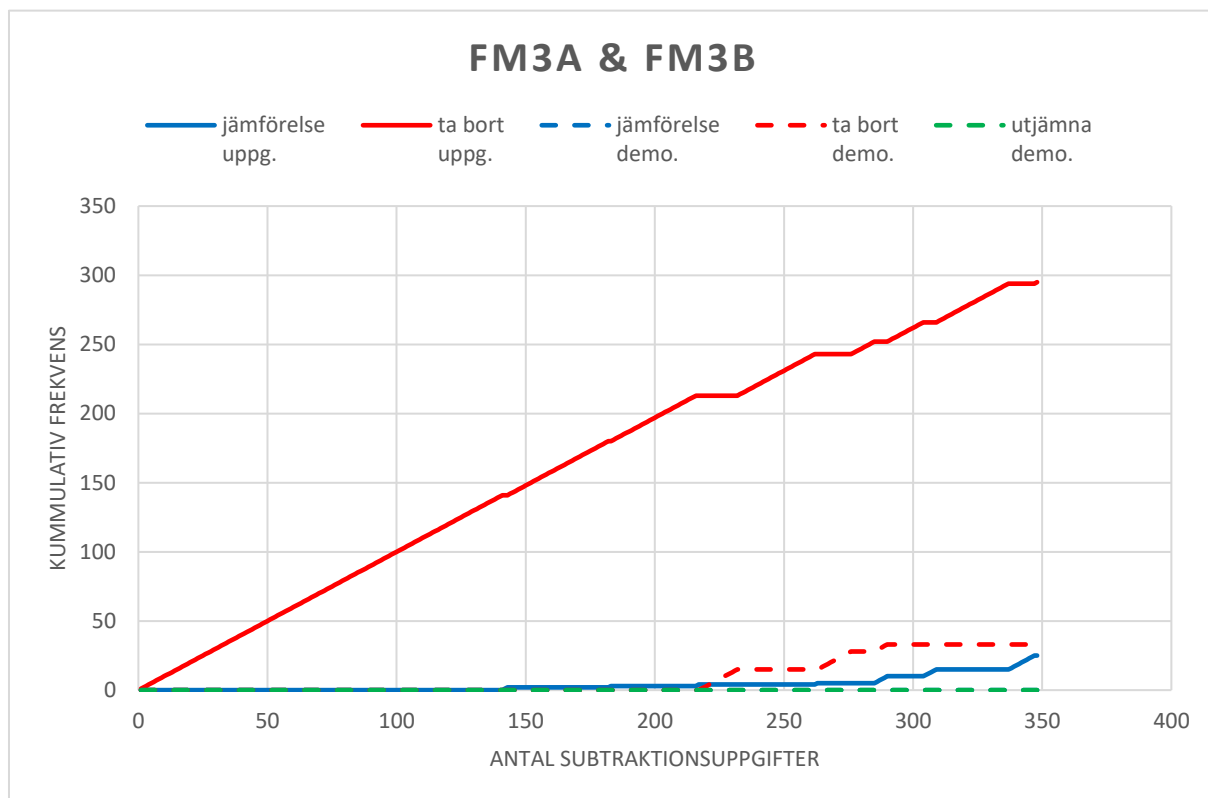
Den gröna streckade linjens kurva visar att det totalt medieras ungefär 100 uppgifter enligt subtraktionsmodellen utjämnade i artefakterna. Det går också att se att de 100 utjämnade uppgifterna är fördelade vid tre tillfällen med ungefär lika många uppgifter vid varje tillfälle. Det kan antas att författarna vill mediera utjämnad-modellen som en alternativ subtraktionsmodell till ta bort-modellen.

Slutligen visar de båda blå linjerna i figur 7 att lärandeobjektet jämföra som subtraktionsmodell knappt medieras alls i årskurs 1. Totalt förekommer ungefär 30 uppgifter av situationen jämföra. Den hela blå linjen visar dessutom att vid första tillfället som elever möter lärandeobjektet jämföra så görs det i uppgiftskontext. Utifrån ovanstående resonemang om att lärandeobjektet ta bort kan förväntas vara konstituerat hos eleven efter ett antal demonstrationsuppgifter så kan man också anta att eleven förväntas ha konstituerat subtraktionssituationen jämföra när den möter uppgifter av uppgiftskontext. Det är således anmärkningsvärt att de första uppgifter av subtraktion enligt jämföra-modell som medieras är av uppgiftskontext och inte av demonstrationskontext. Eleven förväntas ha konstituerat en företeelse som den inte har haft möjlighet att urskilja tidigare i matematikboken. Utifrån den streckade blå linjen åskådliggörs att först senare, i början på bok 1B, medieras lärandeobjektet jämföra enligt demonstrationskontext. Det är alltså först i början av vårterminen i årskurs 1 som elever får se exempel på subtraktionsmodellen jämföra, i matematikboken. Det iscensatta lärandeobjektet subtraktion enligt jämföra-modell förekommer i mycket liten utsträckning i de undersökta artefakterna för årskurs 1.

Sammanfattningsvis visar resultatet att alla 5 uppgiftstyper enligt kodningsmanualen medieras i matematikboken under årskurs 1. Det mest iscensatta lärandeobjektet som medieras i matematikläroböckerna för årskurs 1 är subtraktionssituationen ta bort. Det är en stor skillnad i frekvens mellan mediering av subtraktionssituationer enligt ta bort och övriga subtraktionssituationer.

Läromedel åk 3

Figur 8 visar variationen i uppgiftstyp av alla subtraktionsuppgifter i Favorit matematik 3A och 3B (Karppinen et al., 2018).



Figur 8. Anpassad lorenzkurva för Favorit Matematik 3A & 3B, upplaga 2 (Karppinen et al., 2018).

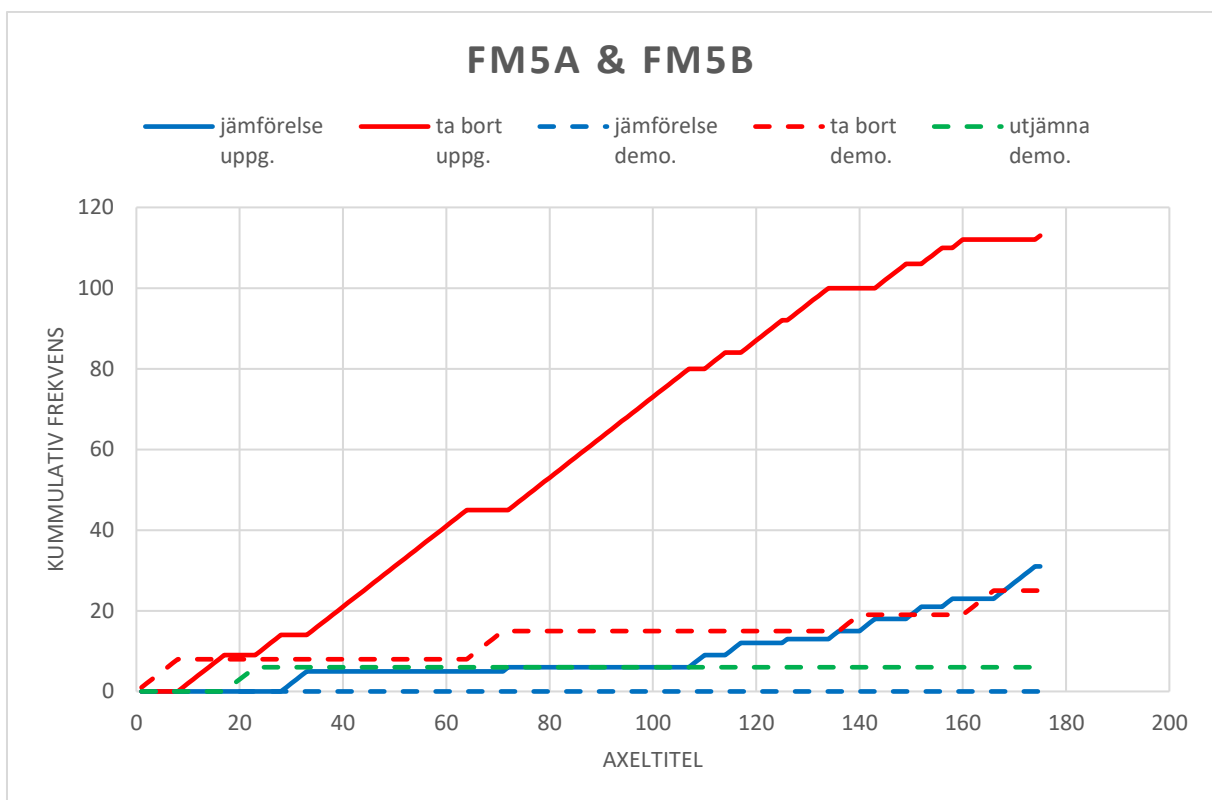
Den mest framträdande kurvan i figur 8 är den hela röda linjens kurva. Den hela röda linjen visar hur mycket uppgiftstypen *ta bort* enligt uppgiftskontext medieras i matematikböckerna för årskurs 3. Linjen stiger nästan konstant genom båda böckerna. Det innebär att uppgiftstypen medieras jämt över båda böckerna. Figuren åskådliggör även hur stor skillnad det är i variation av uppgiftstyper i läromedlen för årskurs 3. Den streckade röda linjen representerar också subtraktionsuppgifter enligt *ta bort*-modell. Linjen representerar antalet uppgifter av *ta bort*-modell som demonstreras i böckerna. Utifrån den streckade röda linjen går det att urskilja hur ett fåtal uppgifter enligt subtraktionssituationen *ta bort* demonstreras under andra halvan av årskurs 3. Det kan antas att subtraktionssituationen demonstreras ur repetitionssyfte då de flesta elever förväntas ha konstituerat företeelsen. Det kan också handla om att iscensätta en ny strategi för beräkning av subtraktion enligt *ta bort*-modell.

Den streckade gröna linjen visar att inga uppgifter enligt subtraktionssituationen *utjämna* medieras i någon av matematikböckerna för årskurs 3. Det går heller inte att se någon stigning

hos den streckade blå linjen. Det finns alltså inga uppgifter av typen jämföra enligt demonstrationskontext. Däremot går det att se en liten stigning i kurvan av den hela blå linjen. Det betyder att matematikböckerna medierar ett fåtal uppgifter enligt lärandeobjektet subtraktion som jämföra. De uppgifterna medieras mot slutet av årskurs 3. Även i årskurs 3 förväntas eleven ha konstituerat företeelsen subtraktion enligt jämföra, eftersom subtraktionssituationen presenteras i uppgiftskontext.

Läromedel åk 5

Figur 9 visar variationen i uppgiftstyp av alla subtraktionsuppgifter i Favorit matematik 5A och 5B (Asikainen, 2015).



Figur 9. Anpassad lorenzkurva för Favorit Matematik 5A & 5B, upplag 2 (Asikainen, 2015).

Resultatet i Figur 9 visar att i Favorit Matematik 5A och 5B finns alla varianter av uppgiftstyper representerade utom jämförelse enligt demonstrationskontext. Inte heller i årskurs 5 finns ett iscensatt lärande av subtraktion i jämföra-situationer. Från den hela blå linjen går att se att böckerna medierar cirka 30 uppgifter av typen jämföra enligt uppgiftskontext. Jämförelse enligt uppgiftskontext presenteras med ett par uppgifter under första tredjedelen av subtraktionsuppgifterna. Under den sista fjärdedelen av subtraktionsuppgifterna blir jämförelse

enligt uppgiftskontext en vanligare uppgiftstyp och förekommer sedan regelbundet. Det analyseras som att de uppgifter av jämföra-modell som medieras i artefakterna förväntas tillhöra elevernas erfarna lärandeobjekt, eftersom de presenteras i uppgiftskontext.

Den hela röda linjen visar att uppgiftstypen ta bort enligt uppgiftskontext finns jämnt representerad genom alla subtraktionsuppgifter i böckerna. Ta bort enligt uppgiftskontext är den mest medierade uppgiftstypen även i årskurs 5. I början, mitten och mot slutet av subtraktionsuppgifterna medieras några lärtillfällen av typen ta bort enligt demonstrationskontext. I början av subtraktionsuppgifterna finns några uppgifter av typen utjämna enligt demonstrationskontext.

Över tid

Figur 10 visar en översikt av uppgiftstyper i läroböckerna Favorit matematik 1A (Ristola, 2018), Favorit matematik 1B (Ristola, 2018), Favorit matematik 3A (Karppinen et al., 2018), Favorit matematik 3B (Karppinen et al., 2018), Favorit matematik 5A (Asikainen, 2015) samt Favorit matematik 5B (Asikainen, 2015) för att utforska en variation av olika subtraktionssituationer. De översta raderna i tabellen beskriver variationen av olika uppgifter i de undersökta artefakterna. För varje bok presenteras antal av olika uppgifter enligt studiens kodningsmanual. Först i varje ruta står antalet uppgifter. Tillsammans med antalet uppgifter presenteras även en procentsats inom parentes. Procentsatsen refererar till det totala antalet subtraktionsuppgifter för respektive bok. I den första rutan vid bok 1A står exempelvis att boken innehåller 79 stycken uppgifter av typen ta bort enligt demonstrationskontext vilket utgör 17% av det totala antalet subtraktionsuppgifter i boken. De två kolumnerna längst ut till höger i tabellen visar det totala antalet subtraktionsuppgifter för respektive bok samt det totala antalet räkneuppgifter för respektive bok. De två nedersta raderna i tabellen visar den sammanlagda frekvensen av uppgiftstyper. Först visas det sammanlagda antalet uppgifter enligt uppgiftstyp i de undersökta böckerna tillsammans. I den första rutan till höger om SUM står exempelvis att antalet uppgifter av typen ta bort enligt demonstrationskontext är 216 stycken i samtliga böcker. På den nedersta raden är uppgiftstyperna sammanslagna enligt subtraktionssituation. Där anges i procent den totala andelen uppgifter i alla 6 böcker enligt subtraktionssituation. Exempelvis syns i den nedersta rutan längst till vänster att 87% av alla undersökta subtraktionsuppgifter är av typen ta bort.

Bok	ta bort enligt demonstrations-kontext	ta bort enligt uppgiftskontext	jämförelse enligt demonstrations-kontext	jämförelse enligt uppgiftskontext	utjämna enligt demonstrations-kontext	Totalt antal subtraktions-uppgifter	Totalt antal uppgifter
1A	79 (17%)	324 (68%)	0 (0%)	12 (2%)	62 (13%)	477	1285
1B	79 (17%)	318 (71%)	8 (2%)	9 (2%)	36 (8%)	450	1723
3A	0 (0%)	213 (98%)	0 (0%)	4 (2%)	0 (0%)	217	1718
3B	33 (24%)	82 (60%)	0 (0%)	21 (16%)	0 (0%)	136	1479
5A	15 (13%)	84 (72%)	0 (0%)	12 (10%)	6 (5%)	117	1308
5B	10 (17%)	29 (50%)	0 (0%)	19 (33%)	0 (0%)	58	1257
SUM	216	1050	8	77	104	1515	8770
SUM %	87%		6%		7%		

Figur 10. Tabell över frekvens för olika subtraktionsformer.

Resultatet som framträder i figur 10 visar tydligt att den vanligaste subtraktionsmodell som medieras över tid i de undersökta matematikböckerna är ta bort-modellen. Tabellen visar att 87% av alla subtraktionsuppgifter i de undersökta böckerna kategoriseras som ta bort. Vidare visar resultatet att ta bort enligt uppgiftskontext är den vanligaste uppgiftstypen i samtliga böcker. Det är alltså uppgifter av ta bort-typ där uträkningsmetod inte förevisas i boken, utan där övrig kontext förutsätter att uppgiften är av ta bort-typ. De näst vanligaste uppgifterna i samtliga böcker utom i 3A och 5B, är ta bort-uppgifter där eleverna förväntas göra som demonstreras i boken. Det handlar oftast om att ta bort varje talsort för sig. I boken demonstreras då uträkningar oftast på två olika sätt. Antingen tränas en vågrät, stegvis beräkning där exempelvis hundratalen dras ifrån först, följt av tiotalen och sedan entalen. Eller så demonstreras uträkningar i form av en lodrät algoritm där det ena talet placeras under det andra, varpå talsorterna subtraheras mot varandra. Ta bort-situationer medieras på olika sätt i illustrationer och räkneexempel mer intensivt i årskurs 1, men repeteras också i de andra studerade artefakterna. Eleven har således goda möjligheter att urskilja de kritiska aspekterna och erfara lärandeobjektet ta bort.

Jämförelse enligt demonstrationskontext, med räkneexempel i boken, medieras enbart i en av de undersökta böckerna och då endast med 8 uppgifter. Över de tre årskurser som resultatet spänner medieras lärandeobjektet subtraktions-situation jämföra egentligen bara vid ett tillfälle,

och det i årskurs 1. Det är bara när lärandeobjektet medieras i demonstrationskontext som eleven har möjlighet att urskilja jämföra och på så sätt konstituera subtraktionssituationen. Även om subtraktionssituationen jämföra medieras i ytterligare några uppgifter i varje läromedel så sker de uppgifterna i uppgiftskontext. Risken är då stor att eleven ändå räknar uppgifterna enligt ta bort-modell eftersom de kritiska aspekterna för jämföra-modeller inte har kunnat urskiljas av eleven.

Ur resultatet i figur 10 framgår att utjämna enligt demonstrationskontext medieras i hälften av de undersökta böckerna och då mest frekvent i boken 1A. Antalet lärtillfällen med uppgifter som medierar lärandeobjektet utjämna är ändå mycket litet. Som mest förekommer subtraktionssituationen utjämna i 13% av uppgifterna i en bok. Utjämna är en modell som forskningen skriver fram som särskilt effektiv vid beräkning av subtraktion (Baroody et al., 2016). Ändå är antalet lärtillfällen för lärandeobjektet utjämna så litet. Att subtraktionssituationen utjämna återkommer i mer än en bok ökar ändå möjligheten för eleven att urskilja de kritiska aspekterna för lärandeobjektet och konstituera företeelsen. Det totala antalet subtraktionsuppgifter sjunker i varje bok från 477 uppgifter i 1A till 58 i 5B. Det kan förklaras av att matematikböckerna går från att mediera grundläggande aritmetik i de lägre årskurserna till att behandla även andra matematiska områden så som geometri och statistik.

Specialpedagogisk analys

När resultatet analyseras ur ett sociokulturellt perspektiv (Säljö, 2014) med fokus på mediering framstår matematikboken som en artefakt som medierar matematikens värld för eleven. Artefakter påverkar människans förståelse av världen. Matematikboken som en artefakt påverkar elevens förståelse för matematiska fenomen. Studiens resultat med ett så snedfördelat förhållande mellan de tre subtraktionssituationerna påverkar således eleven förståelse för matematik. Eftersom en så stor andel av subtraktionsuppgifterna i de undersökta matematikböckerna är ta bort-situationer kommer elevens förståelse för subtraktion bli likställd med ta bort-situationer. Subtraktion kommer således bli synonymt med ta bort.

Ur ett variationsteoretiskt perspektiv kan vi analysera resultatet som ett lärandeobjekt (Holmqvist, 2006). I teoridelen argumenteras för hur matematikbäckers innehåll motsvarar det iscensatta lärandeobjektet i matematikundervisningen. Av studiens resultat framgår således att det iscensatta lärandeobjektet i studien i stor majoritet är ta bort-situationer. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv framgår också att lärande av ett fenomen sker när skillnader visualiseras för eleven. I matematikböcker borde därför lärande ske mest när uppgifter

presenteras ur demonstrationskontext. I studien kodus uppgifter olika utifrån demonstrationskontext eller uppgiftskontext. I studiens resultat finns det endast 8 uppgifter i någon av matematikböckerna där jämföra-situationer demonstreras. Endast i Favorit matematik 1B finns det iscensatt lärande för subtraktion av jämföra-situationer enligt variationsteoretisk modell. Av ca 1500 subtraktionsuppgifter har eleven möjlighet 8 gånger att uppleva subtraktion som en jämförelse av två tal. De 8 gångerna sker alla under vårterminen i årskurs 1. Även om antalet jämföra-situationer enligt demonstrationskontext inte ökar efterhand i matematikböckerna så ökar antalet jämföra-situationer enligt uppgiftskontext senare i böckerna. Det finns alltså en ökning av iscensatt lärande av subtraktion som jämföra-situationer mot slutet av årskurs 5. I Favorit matematik 5B utgör jämföra enligt uppgiftskontext 33% av det totala antalet subtraktionsuppgifter. Det kan tolkas som en intention från läromedelsförfattarna att förbereda eleverna inför den algebra de kommer möta i årskurs 6.

Ur ett specialpedagogiskt salutogent perspektiv (Mittelmark, 2017) finns ett antal aspekter att analysera mot studiens resultat. Enligt ett salutogent perspektiv av det specialpedagogiska uppdraget bör speciallärarens arbete främst vara förebyggande. I ett salutogent perspektiv ska elevens behov av stöd i matematik framför allt avhjälpas genom att förändra lärmiljön eleven befinner sig i. I linje med det resonemanget ingår också att förändra elevens pedagogiska lärmiljö. Studien fortsätter det resonemanget till att innefatta även elevens didaktiska lärmiljö. Studiens resultat ger speciallärare och matematiklärare kännedom om dels de kritiska aspekterna av subtraktion som fenomen (Fuson, 1992), dels vilka förutsättningar Sveriges mest använda matematikläromedel ger för elevens lärande i förhållande till de kritiska aspekterna. Ur resultatet framgår att 87% av alla lärtillfällen i subtraktion i årskurs 1, 3 och 5 är ta bort-situationer. Endast i början av vårterminen i årskurs 1 medieras ett fåtal lärtillfällen av subtraktionssituationen jämföra så att elever har möjlighet att urskilja den kritiska aspekten av subtraktion. Den tredje kritiska aspekten av subtraktion medieras visserligen något mer regelbundet över alla tre årskurser men fortfarande i ett mycket litet antal lärtillfällen, endast 6%.

Konsekvenser av studiens resultat för speciallärare är således kännedom om vad elevernas undervisning behöver kompletteras med för att de inte ska hamna i behov av stöd i matematik. Bristen på variation av subtraktionsuppgifter i det undersökta matematikläromedlet blir en riskfaktor i elevens matematikutveckling. Framför allt elever i matematiksvårigheter riskerar att hamna i ytterligare behov av stöd i matematik om de inte tidigt får goda möjligheter att urskilja centrala kritiska aspekter i grundläggande aritmetik (Neuman, 2013). Med kännedom om och vetskap om hur så kan riskfaktorn vändas till en friskfaktor. Risken för att hamna i

behov av stöd i matematik kan påverka elevens känsla av sammanhang i matematikundervisningen. För att eleven ska uppskatta matematikundervisningen behöver den vara begriplig, meningsfull och hanterbar. Genom en utvecklad didaktisk kunskap utifrån studiens resultat kan matematikundervisningen bli mer begriplig för elever som riskerar att hamna i behov av stöd. Undervisningen blir då samtidigt mer hanterbar och meningsfull och eleven känner en större känsla av sammanhang.

Diskussion

I diskussionsdelen diskuteras studiens resultat i förhållande till teori och forskning. Här förs också en diskussion kring studiens specialpedagogiska implikationer och metod. Slutligen kommer förslag på vidare forskning att diskuteras.

Resultatdiskussion

I likhet med tidigare forskning (Norberg, 2020) bekräftar studien att matematikböcker innehåller mycket liten andel subtraktionsuppgifter med jämförelsesituationer. Resultatet bekräftar också bilden av att matematikundervisning i de lägre åldrarna domineras av subtraktion enligt ta bort-situationer (Fuson, 1992; Norberg, 2020). Matematikböckerna erbjuder sålunda i stort sett enbart lärtillfällen för eleverna att tillgodogöra sig en bild av subtraktioner som dynamiska, som ta bort-situationer. Studiens antagande utgår från tidigare forskningsresultat som visat att lärobokens innehåll har stor inverkan på elevers lektionsinnehåll och de lärandetillfällen som eleverna möter i sin undervisning (Mullis et al., 2012). 89% av lektionstillfällen i Sverige utgår från matematikböcker. Studien utgår också, i likhet med andra studier (Norberg, 2020) från att det erbjudna, iscensatta lärandeobjektet, som presenteras i matematikboken är detsamma som det erfarna lärandeobjektet, alltså det som eleven tränar genom att räkna uppgiften. I praktiken går det inte att säkerställa att eleven räknar på det sätt som matematikboken förordar. Elever kan välja helt andra matematiska strategier för att beräkna uppgifterna i boken än de som avses. Det blir i slutändan upp till varje lärare att avgöra i vilken omfattning elever räknar i enlighet med de strategier som erbjuds i matematikläromedlen. Studien kan inte ta hänsyn till alla sådana eventualiteter utan måste utgå från att elever faktiskt utför uppgifterna i matematikboken på det sätt som boken avser.

Studios resultat innebär att elever som använder matematikböcker som domineras av ta bort-principen, som exempelvis Favorit Matematik, får mycket träning i subtraktion enligt ta bort-principen. Elever möter ofta ta bort-situationer i sin vardag: när de handlar, leker eller spelar spel. Alla gånger som de ska ta bort en mängd från en större mängd, så kommer eleverna veta vad de ska göra och ha strategier som exempelvis algoritmer eller tabellkunskap för att beräkna uppgifterna. Fuson (1992) benämner det som att eleverna tränas i att bli mänskliga räknemaskiner. Det är först när eleverna möter svårare uppgifter som är obekanta, eller kräver beräkningar i flera led, när det inte längre är en mängd som de ska subtrahera från, som eleverna kan stöta på problem. Eleverna riskerar även att få svårigheter med algebra och med operationer

med negativa tal, liksom med problemlösning. Det i sin tur gör att ord som jämför och färre (Fuson, 1992) blir svåra att förstå och beräkna för elever som inte möter motsvarande subtraktionsmodeller i sin undervisning. Det påverkar elevens förståelse för subtraktion som en binär operation, en jämförelse av två tal. Även utjämningsproblem som innebär att ta bort från en mängd för att den ska motsvara en annan riskerar att bli svårt för eleven. Förståelse av subtraktion som en utjämningsituation öppnar upp för alternativa strategier för att lösa subtraktion, som exempelvis subtraktion som addition (Baroody et al., 2016). Tidigare forskning har visat att elever behöver möta de olika subtraktionsstrategierna redan i låg ålder. I senare skolålder visar studier att elever trots insatser får svårigheter att använda olika strategier för beräkning av subtraktion (De Smedt et al., 2010). Samtidigt finns det exempel på hur praktiskt laborativt arbete kan ge goda möjligheter för elever att lära sig använda flera olika strategier för beräkning av subtraktion (Murdiyani, 2013). I den här studien visas hur elever redan från årskurs 1 tränas i att se subtraktion som nästan enbart ta bort-situationer och hur det dessutom fortsätter att vara den dominerande subtraktionssituationen i matematikböckerna upp i årskurs 5, även efter att algebra introducerats för eleverna. Då det undersökta läromedlet är det mest frekvent förekomna i Sverige är studiens resultat extra intressant. Frågan är om denna begränsning kan skapa problem för vissa elever?

Studiens resultat visar att lärare och speciallärare behöver bli medvetna om vilka subtraktionsmodeller som erbjuds i det läromedelsmaterial som de väljer i sin undervisning. Lärare behöver kompensera för det ensidiga lärande av subtraktion som, i det här fallet, matematikläromedel erbjuder. Genom laborativa övningar (Murdiyani, 2013) men också demonstrativa exempel (Matanovic & Ohlsson, 2021) behöver lärare visa elever på såväl jämförelsesituationer som utjämningsituationer.

Främst handlar matematikundervisning om att förbereda eleverna att bli matematiskt kunniga nog att fungera i samhället (Skolverket, 2012). Forskningen visar en samstämmighet i att förmågan att kunna växla mellan strategier efter vilken som är lämpligast för uppgiften är avgörande för att bli en framgångsrik matematiker (Baroody et al., 2016; Peters et al., 2012; Hickendorff, 2020). I många klassrum bedrivs matematikundervisning med läromedel som utgångspunkt för undervisningen. Då är det viktigt att de läromedel som används också tränar den dubbla förståelsen för subtraktion (Xin, 2007).

Norberg (2019) visar att 6 av 17 undersökta läromedel inte innehåller några jämförelsesituationer alls. Den här studien visar att elever möter en förklarad jämförelse-situation vid ett tillfälle i de undersökta matematikböckerna för åk 1. Studier (Mullis et al., 2012; Koljonen, 2020) visar även att lärare i svenska skolor i mycket hög grad utgår från matematikläromedel i

sin undervisning. Tillsammans med Norbergs (2020) studie om hur det iscensatta lärandet i matematikboken också i hög grad blir det erfarna lärandet hos eleven, innebär det att elever riskerar att inte lära sig jämförelse alls under sin tidiga matematikutveckling. I förhållande till det variationsteoretiska perspektiv (Holmqvist, 2006) och den teori om fenomenet subtraktion (Fuson, 1992) som presenterats innebär det att eleven inte får möjlighet att lära sig en kritisk aspekt av subtraktion. Det innebär att eleven riskerar att sakna kritisk förståelse för begreppet subtraktion som helhet och därmed hamna i matematiksvårigheter.

Specialpedagogiska implikationer

Ur ett specialpedagogiskt perspektiv skapar studiens resultat en viktig förståelse framför allt i det förebyggande arbetet med elever (Fuson, 1992). Elevgrupper som får en ensidig förståelse för subtraktion riskerar att få stora svårigheter längre fram i sin utbildning när de exempelvis ska utföra operationer med negativa tal och inom algebra (Knuth et al., 2006). Eleverna kan även få svårigheter i sin förmåga till problemlösning (Fuson, 1992). I textbaserade problemlösningssuppgifter förekommer i större utsträckning uppgifter av jämförelse- och utjämna-typ än i övriga uppgifter och då känner eleverna inte igen begreppen som refererar till annat än ta bort-modeller. De elever som är i behov av specialpedagogiskt stöd i sin matematikundervisning löper än större risk att få mer direkta svårigheter med förståelse för subtraktion om de bara möter en slags subtraktionssituation i sin undervisning. För att förebygga dessa svårigheter kan man arbeta laborativt med tallinjen (Murdiyani et al., 2013), men även arbete med tydliga didaktiska modeller ger resultat (Matanovic & Ohlsson, 2021). Studien visar att antalet subtraktionsuppgifter i böckerna inom läromedelsserien minskar från årskurs 1 till årskurs 5. Det är rimligt att anta att det är för att innehållet går vidare till att behandla annat matematiskt innehåll. I relation till det visar studiens resultat att antalet lärtillfällen till fördel för subtraktionssituationer av ta bort-typ är inte bara är dominerande i antal utan också över tid. Sammantaget kan det innebära att elever som senare möter andra subtraktionssituationer inte kommer att känna igen dem som subtraktion. Därmed kommer deras förmåga att beräkna dessa uppgifter att vara kraftigt begränsad. Det kan i sin tur i förlängningen leda till specifika matematiksvårigheter (Dowker, 2019). Förståelse för vilka kunskapsluckor olika läromedel innehåller är en förutsättning för att kunna arbeta förebyggande och skifta fokus på det specialpedagogiska arbetet från ett individualistiskt och kompensatoriskt perspektiv till fokus på samspelet mellan det individuella och det omgivande (Nilholm och Göransson, 2013). Bäst effekt har de specialpedagogiska insatser som sker innan eleverna

misslyckas, innan elever har skapat missuppfattningar som behöver arbetas med kompensatoriskt (McIntosh, 2020).

Ett salutogent förhållningssätt i arbetet handlar om att stärka den enskildes känsla av sammanhang och mening (Mittelmark, 2017) samt att fokusera på de faktorer som ger välbefinnande. Genom att kartlägga matematikböcker kan vi fokusera på vad som fungerar och vad som får individen att lyckas. Genom kartläggningen kan man synliggöra vilka uppgifter som får individer att må bra och prestera bättre utifrån utgångsläge. Utifrån det salutogena förhållningssättets centrala begrepp, begriplighet, hanterbarhet och meningsfullhet kan en studie som denna tillhandahålla information för undervisande pedagoger. Den informationen kan i sin tur leda till att de kan skapa begriplighet för uppgifterna i matematikboken samt göra det möjligt för eleverna att kunna hantera uppgifterna. På så vis kan elever finna meningsfullhet i sitt arbete i matematikboken. Eleven kan då öka sin motivation för undervisning och få en växande självkänsla i att lyckas.

Således svarar studiens resultat, analys och diskussion mot studiens frågeställningar om med vilken frekvens som uppgifterna av modeller ta bort, jämföra och utjämna förekommer i en vanligt förekommande matematikläromedelsserie i åk 1,3 och 5 samt vilken specialpedagogisk betydelse typen av uppgifter och frekvensen av dem kan få för elever i behov av stöd i matematik och deras matematikutveckling. Med utgångspunkt ur ett salutogent perspektiv söker studien således ny kunskap som är en viktig del i specialläraruppdraget.

Begränsningar

Studien undersöker endast vilka lärtillfällen elever möter i ett specifikt matematikläromedel och gör inte anspråk på att ge en generell bild av matematikundervisningen som helhet. Det iscensatta lärandeobjektet är erfarenhetsrelaterat och varierar därför mellan personer och elever. Studien undersöker heller inte vad elever uppfattar och lär utifrån läromedlet.

Metoddiskussion

Dokumentanalys som användes i studien fungerade väl för att få en översikt av frekvensen av olika subtraktionssituationer i den undersökta läromedelsserien. Den valda kodningsmanualen fungerade för studiens syfte. Kodningsmanualen skulle kunna ändras för att istället ge en bild av hur läromedel presenterar annat innehåll, som algebra eller addition. De anpassade lorenzkurvorna ger dessutom en god överblick över hur subtraktionssituationerna fördelades i förhållande till varandra. Lorenzkurvor är således ett effektivt verktyg för att få en överblick

över vad läromedel tar upp och inte tar upp. För studiens resultat hade kanske ett enklare verktyg också kunnat fungera. Kurvorna ger en bild av hur uppgifterna är fördelade över böckerna. Den fördelningen är inte avgörande för resultatet i studien, men den kan även användas i en annan studie. Lorenzkurvorna kan relativt enkelt anpassas för att ge en bild av hur ett innehåll är fördelat över böcker, eller årskurser. Om sådan analys görs mer omfattande med fler läromedelstitlar och olika kunskapsområden och förmågor kan det ge en god bild av vad lärare behöver kompensera för i sitt val av läromedel. Studien ger även förlagen en god bild av vad som täcks in i deras läromedel och hur de kan förbättra sitt material. Den rådande pandemin, 2019, gjorde också att det blev svårare att ta sig ut på skolor och göra mer kvalitativa undersökningar. Det hade annars varit givande för studien att ha även ett kvalitativt infall. En mer kvalitativ del hade kunnat ge inblick i hur lärobokens subtraktionssituationer togs emot av elever. Det är en begränsning i studien att den enbart hänvisar till potentiella lärandesituationer i förhållandet mellan lärobok och elev utan en faktisk kvalitativ undersökning om det förhållandet.

Förslag på fortsatt forskning

Vidare studier inom andra matematiska fenomen hade kunnat ge en djupare inblick i relationen matematikläromedel och elever i behov av stöd i matematik. Det hade varit spännande att, ur ett specialpedagogiskt perspektiv, undersöka hur en kompensatorisk insats inom subtraktion hade fallit ut inom en elevgrupp över tid. Med tanke på den mängd forskning som finns inom just läromedelsforskning hade det varit intressant med en metastudie kring just vilka förmågor som matematikböcker tränar och vilket innehåll de erbjuder elever. Det hade även varit givande att ge ett elevperspektiv på studien för att få en insyn i det iscensatta lärandet jämfört med det erfarna lärandet. Vidare kan med fördel undersökas hur medvetna lärare är om vilka kunskapsområden olika läromedel innehåller och inte innehåller och hur medvetet de arbetar för att kompensera för det. Det hade också varit intressant att studera hur insikten om olika läromedels innehåll har förändrats sedan Statens institut för läromedelsinformation lades ner.

Referenser

- Asikainen, K. (2015). *Favorit matematik 5A*. (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Asikainen, K. (2015). *Favorit matematik 5B*. (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Baroody, J. A., Purpura, J. D., Eiland, D. M., Reid, E. E., & Paliwal, V. (2016). Does Fostering Reasoning Strategies for Relatively Difficult Basic Combinations Promote Transfer by K-3 Students? *Journal of Educational Psychology*, *108*(4), 576–591. <https://doi.org/10.1037/edu0000067>
- Bruner, J.S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mass: Belknap Press. CRA
- Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (tredje upplagan). Stockholm: Liber.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The Effect of Semantic Structure on First Graders' Strategies for Solving Addition and Subtraction Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 363-381. doi:10.2307/749085
- De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning & Instruction*, *20*(3), 205–215. <https://doi-org.proxy.mau.se/10.1016/j.learninstruc.2009.02.020>
- Dowker, A. *Individual Differences in Arithmetic: Implications for Psychology, Neuroscience and Education* (2 uppl). Routledge
- Frisk, S. (2009). Subtraktion i läromedel för årskurs 2. *Nämnamnaren*, nr 3, 10-15.
- Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. I D. Grouws (Red)., *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 243-275. National Council of Teachers of Mathematics
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130-162.
- Hickendorff, M. (2020). Fourth graders' adaptive strategy use in solving multidigit subtraction problems. *Learning & Instruction*, *67*, N.PAG. <https://doi-org.proxy.mau.se/10.1016/j.learninstruc.2020.101311>
- Holmqvist Olander, M. (red.) (2006). *Lärande i skolan: learning study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur.

- Jensen, L. (2017). *Inkluderingskompetens vid adhd & autism*. (2: a upplagan). [Södra Sandby]: Be My Rails.
- Karppinen, J., Kiviluoma, P. & Urpiola, T. (2018). *Favorit matematik 3A*. (Upplaga 2). Lund: Studentlitteratur.
- Karppinen, J., Kiviluoma, P. & Urpiola, T. (2018). *Favorit matematik 3B*. (Upplaga 2). Lund: Studentlitteratur.
- Kilhamn, C. (2020). Från med och mellan – små ord med stor betydelse. *Nämnamn*, nr 1, 17-20.
- Koljonen, T. (2020). *Finnish mathematics curriculum materials and teachers' interaction with them in two cultural-educational contexts*. Doktorsavhandling: Vasa, Finland.
- Lag om upphovsrätt till litterära och konstnärliga verk*. (SFS 1960:729). Justitiedepartementet. https://www.riksdagen.se/sv/dokument-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/lag-1960729-om-upphovsratt-till-litterara-och_sfs-1960-729
- Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet*. (2022). Skolverket. <https://www.skolverket.se/publikationer?id=13074>
- McIntosh, A. (2020). *Förstå och använd tal: en handbok*. (Upplaga 2). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.
- Mittelmark, M. B., Sagy, S., Eriksson, M., Bauer, G.F., Pelikan, J.M., Lindström, B. & Espnes, G. A. (red.) (2017). *The handbook of salutogenesis*. [Cham]: Springer.
- Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.
- Murdiyani, N. M., Zulkardi, Putri, R. I. I., van Eerde, D., & van Galen, F. (2013). Developing a Model to Support Students in Solving Subtraction. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 4(1), 95–112.
- Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18(2), 3–46.
- Nilholm, C., & Göransson, K. (2013). *Inkluderande undervisning: vad kan man lära av forskningen?* Hämtad från Specialpedagogiska skolmyndigheten website: <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mau:diva-13409>
- Norberg, M. (2020). *Från design till meningsskapande: En multimodal studie om elevers arbete med matematikläroböcker i årskurs 1*. Mid Sweden University Doctoral Thesis.

- Norberg, M. (2019). Potential for Meaning Making in Mathematics Textbooks. *Designs for Learning*, 11(1), 52–62. DOI: <https://doi.org/10.16993/dfl.123>
- Ohlsson, C., & Matanovic, M. (2021). *Visualisering i matematikundervisningen: och dess påverkan på elevers matematikförståelse* (Dissertation). Hämtad från <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mau:diva-43897>
- Peters, G., Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 335–349. <https://doi-org.proxy.mau.se/10.1007/s10649-011-9308-3>
- Petersson, J., Sayers, J., Rosenqvist, E., & Andrews, P. (2021). Two novel approaches to the content analysis of school mathematics textbooks. *International Journal of Research & Method in Education*, 44(2), 208–222. <https://doi.org/10.1080/1743727X.2020.1766437>
- Ristola, K., Tapaninaho, T. & Tirronen, L. (2018). *Favorit matematik 1A*. (Upplaga 2). Lund: Studentlitteratur.
- Ristola, K., Tapaninaho, T. & Tirronen, L. (2018). *Favorit matematik 1B*. (Upplaga 2). Lund: Studentlitteratur.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (2012). Taking away and determining the difference—a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 389–408. <https://doi-org.proxy.mau.se/10.1007/s10649-011-9305-6>
- Skollag. (SFS 2010:800). Utbildningsdepartementet. https://www.riksdagen.se/sv/dokument-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800
- Stacey, K., Vincent, J. Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educ Stud Math* 72, 271 (2009). <https://doi-org.proxy.mau.se/10.1007/s10649-009-9193-1>
- Säljö, R. (2014). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. (3. uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Utökad undervisningstid i matematik: hur en ökning av undervisningstiden kan användas för att stärka elevernas matematikkunskaper*. (2012). Stockholm: Skolverket.
- Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed*. (Reviderad utgåva). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Bilagor

Bilaga 1

Datum	Databas /sökmotor	Sökord/keywords, kombination	Begränsningar	Antal träffar	Anteckningar
2020-12-13	Libsearch from Ebsco via MAU biblioteket	"subtraction by addition" OR "subtract by counting up" OR "indirect addition"	Utg år:2010-2020, scholarly and peer review, Källa: ERIC, Education Research Complete,	12	Tog ursprungligen med Teacher reference center men utan förändrat antal träffar
2020-12-12	Libsearch from Ebsco MAU biblioteket	subtraction strategies* or solution strategies*	2010-2020, scholarly and peer review, Begränsa ämne: subtraction	70	
2020-12-12	Libsearch from Ebsco MAU biblioteket	Mathematics education and complement principle	2010-2020, scholarly and peer review, Begränsa ämne: subtraction	28	
2020-12-12	Libsearch from Ebsco MAU biblioteket	Mathematics education and subtraction strategies and arithmetic	2010-2020, scholarly and peer review	11	