NATUR-MATEMATIK-
SAMHÄLLE

Självständigt arbete i fördjupningsämnet matematik och lärande
15 högskolepoäng, grundnivå

Utvecklingen av elevers tidiga relationella förståelse i matematik

Development of students early relational understanding in mathematics

Hanna Winterfeldt

Grundlärarexamen med inriktning mot arbete i årskurs F-3, 240 högskolepoäng
Självständigt arbete på grundnivå, 15 högskolepoäng
Slutseminarium: 2023-01-19

Examinator: Helen Hasslöf
Handledare: Pernilla Granklint Enochson

Förord

Följande arbete har skrivits av Hanna Winterfeldt inom ramen för kursen Självständigt arbete på grundnivå i fördjupningsämnet matematik på grundlärarutbildningen på Malmö universitet.

Jag vill rikta ett tack till min handledare samt min handledningsgrupp för givande samtal och stöd under arbetsgången.

Abstrakt

Generalisering av matematiska koncept är avgörande för att kunna få relationell förståelse för matematik (Sophian 2013; Skemp 2006). Matematik är uppbyggd av strukturer och mönster. Syftet med denna kunskapsöversikt är att ta reda på hur elever i lågstadieålder förstår dessa mönster och om förmågan till generalisering av matematiska koncept påverkar elevers relationella förståelse. Arbetet utgår ifrån en systematisk sökprocess vars ambition är att sammanfatta forskning som kan besvara kunskapsöversiktens frågeställning. I sökprocessen valdes 5 artiklar som redovisats och analyserats. Resultatet visar att elever som får undervisning i matematiska strategier och koncept lär sig att generalisera bättre och får därmed en större relationell förståelse. Dock visar forskningen att det ändå är många elever som, trots strategisk undervisning, har svårt att få fullständig relationell förståelse för matematik i lågstadieålder.

Nyckelord: Generalisering, kognitiva strategier, lågstadiet, matematikförståelse, relationell förståelse, undervisning.

Innehållsförteckning

1. Inledning

Hur barn förstår matematik har intresserat mig länge. Under min verksamhetsförlagda utbildning (VFU) i en tredjeklass reflekterade jag mycket över hur elever tog till sig matematikinnehållet och hur vissa elever kunde bygga vidare på sina tidigare kunskaper medan vissa andra såg varje nytt kapitel som något helt nytt och lösryckt från de tidigare kapitlen. Jag undrade vad detta berodde på och upptäckte att de elever som snabbt kunde överblicka matematiken och se mönster i matematiken kunde också överföra dessa slutsatser till annat innehåll och på det sättet fördjupa sin kunskap och komma vidare. Jag funderade på om det handlade om förmåga att generalisera matematik.

Förmågan att kunna generalisera innefattar förmågan att se mönstren och framförallt sambanden i den matematiska uppbyggnaden. Ett barn som lär sig språk kan i början kalla alla växter för blomma och senare förstå att blommor kan delas upp i ros, tulpan, blåsippa. När barnet förstår detta har den generaliserat sin kunskap om konceptet blommor. Ett matematiskt exempel på användbar generalisering är dubbel och hälften. Har eleven en grundlig förståelse för dubbelt och hälften kan eleven använda generaliseringen för att förstå andra matematiska koncept lättare (Björklund, 2016).

Lüken och Sauzet (2021) definierar matematik som en vetenskap uppbyggd av mönster, strukturer och logiska förhållanden (Lüken & Sauzet, 2021). För att förstå matematiken på djupet behöver eleven se och förstå dessa aspekter. Richard Skemp (2006) har forskat om konceptet förståelse och delat upp begreppet i relationell och instrumentell förståelse. Relationell förståelse bygger på att eleven förstår de bakomliggande strukturerna och förstår varför lösningar ser ut som de gör. Instrumentell förståelse beskriver Skemp (2006) som en ytlig förståelse där eleven mest följer instruktioner. För att förstå strukturen och helheterna i matematik måste man förstå de bakomliggande mönstren och sambanden samt ha strategier för att kunna utnyttja dessa samband (Skemp, 2006). Ett exempel på strategi som kan underlätta matematiken är generaliseringen att varje helt tiotal subtraherat med två får en åtta som ental. Finns det en förståelse för detta och en förståelse för talraden är det lika lätt att räkna 140–2 som 10–2. Däremot en elev som inte alls kan generalisera och bara har strategin att räkna på fingrarna kommer ha svårt att utvecklas i matematik (Björklund & Grevholm, 2014).

I matematikundervisningen i skolan idag ingår det mycket problemlösning och eleven ska kunna hitta vägar till att lösa olika typer av problem (Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (Lgr22), 2022). I arbetet undersöks om generaliserad förståelse av olika matematiska koncept kan vara ett hjälpmedel för eleven att hitta dessa vägar mer effektivt. Eftersom arbetet ingår i en grundlärarutbildning med inriktning mot arbete i årskurs F-3 kommer huvudfokus ligga på lågstadieelever.

2. Syfte

I läroplanens matematikkapitels början är ett avsnitt som behandlar det övergripande syftet med matematikundervisning. Där är det tydligt att läroplanen anger att elever ska utveckla strategier och välja dessa med omsorg för att kunna lösa olika typer av matematiska problem. Eleven ska få förutsättningar för att utveckla förmågan att strategiskt välja bland metoder (Lgr22, 2022). Då måste lärare utforma undervisningen för att dessa förmågor ska stärkas.

Syftet med denna kunskapsöversikt är att samla och sammanfatta en del av den forskning som finns om barns tidiga matematikinlärning med generaliseringsförmåga i centrum. Arbetet ska ta reda på hur elever i lågstadiet kan lära sig matematik på ett hållbart sätt så de kan bygga vidare sina kunskaper längre fram i sin utbildning med generaliseringsförmåga, kognitiva strategier och relationell förståelse som fokus. Målet är att förstå hur lärare kan underlätta den matematiska inlärningsprogressionen för att eleverna ska få en kunskapsgrund de självständigt kan arbeta vidare på.

2.1 Frågeställning

Kunskapsöversiktens frågeställning:

- Hur ser generaliseringsförmåga ut och vilken påverkan har den på relationell matematikförståelse?
- Hur kan vi undervisa så att generaliseringsförmågan och relationell förståelse utvecklas?

3. Metod

3.1 Datainsamling

Denna text är en kunskapsöversikt och behöver därmed bygga på relevant forskning. Tillvägagångssättet har varit att göra digitala sökningar via olika databaser som innehåller vetenskapliga artiklar. I detta avsnitt redogörs vilka sökord som använts, sökprocessen för att hitta relevant forskning samt redovisning och motivering av avgränsningar. Slutligen presenteras de källor jag valt att använda samt en analys och distribution av källorna.

3.2 Sökprocesser och sökord

Sökningarna har gjorts på engelska för att bredda sökresultaten och eftersom arbetets frågeställning inte exklusivt går att svara på ur ett svenskt perspektiv. Eftersom detta är en kunskapsöversikt har jag valt att begränsa mina sökningar till bara peer reviewed artiklar då jag vill försäkra mig om att det är godkänd forskning. Forskning som är peer reviewed har blivit objektivt granskad av andra oberoende forskare (Öhstlund, 2022).

Det finns många olika databaser som innehåller vetenskapliga artiklar. På Malmö universitets rekommendation har jag använd ERIC via ebsco och Education Research Complete (ERC) då de innehåller mycket sammanställd forskning inom pedagogik.

Sökprocessen börjar med att göra en sökning i en vetenskaplig databas med utvalda sökord för frågeställningen. Därefter läses rubriker och eventuellt abstracts om inte rubriken innehåller något av de för arbetet exkluderade nyckelorden (se tabell 1). Sökningarna sorteras efter relevans och därför har inte alltid alla rubriker läst. Sökmotorn delar in artiklarna efter relevans och detta bekräftades då antalet relevanta artiklar förekom mindre och mindre frekvent i sökningarna. I de flesta fall slutade rubriker läsas när det inte funnits någon relevant artikel på det senaste tio träffarna. Då drogs slutsatsen att sökmotorn inte hade något mer av relevans. De artiklar som verkade relevanta för frågeställningen sparades ner och lästes en och en. Här gjordes ett till urval för att försäkra artikelns relevans. Efter detta gjordes en ny sökning med andra sökord och processen började om.

3.2.1 Avgränsningar och sökord

Ett antal sökord har valts som kan vara relevanta för min frågeställning. I processen har också några ord valts ut som visar att artikeln inte är relevant, så kallade exkluderingsord (se tabell 1). Detta arbete fokuserar främst på matematikförståelse i lågstadiet, därför har artiklar som behandlar lågstadiet prioriterats. Eftersom relationell förståelse och generaliseringsförmåga utvecklas i alla åldrar gjordes valet att också ta med artiklar som undersöker mellanstadiet för att få en bredare bild på hur relationell förståelse utvecklas. Artiklar som behandlar åk sju och uppåt har exkluderats då de är för långt ifrån den matematiska grunden som behandlas på lågstadiet.

I sökprocessen upptäcktes många gemensamma nyckelord för de artiklar som inte var relevanta detta resulterade i en lista med exkluderingsord. Eftersom arbetet handlar om grundskolans lågstadie har artiklar om ”disabled learners” eller specialpedagogik exkluderats. Artiklar som språkutveckling, motivation och ångest i relation till matematik har exkluderats från detta arbete.
Om något av de utvalda exkluderingsorden fanns med i artikelns rubrik, abstract eller ”key words” exkluderas artikeln. Full redogörelse av vilka sökord som valts respektive exkluderats redovisas i tabellen nedan.

Tabell 1. Redogörelse för inkluderade och exkluderade sökord.

Inkluderade sökord	**Exkluderade sökord**
Generalization	Special education
Early mathematics	Disabled learners
Strategies	Vocabulary
Relational understanding	Etics
Mathematics	Technology
Sustainable learning	Culture

Education	Motivation
Cognitive strategies	Anxiety
Grade 1 OR grade 2 OR grade 3	Corriculum development
	Social class
	Gender
	Language
	High school
	Relations
	Collage
	Climate change
	Assesment
	Distans teaching
	Word problems

3.1.2 Eric via Ebsco

Den första sökning gjordes i databasen Eric via Ebsco och de första sökorden var *Generalization* AND *early mathematics* vilket gav sex träffar. Efter att ha läst alla rubriker och abstracts blev resultatet att två artiklar var relevanta för frågeställningen (Sophian, 2013; Björklund, 2016). Dessa valdes för att de hade stort fokus på generaliseringsförmåga och relationell förståelse. De andra fyra artiklarna exkluderades på grund av att de innehöll något eller flera av de exkluderande nyckelorden.

Den andra sökningen gjordes med sökorden *Early mathematics* AND *strategies* och den gav 111 träffar. Rubriken lästes på de första 57 artiklarna och den sista relevanta artikeln hittades på den 16e träffen. Eftersom detta var den första sökningen ville jag försäkra mig om att sökmotorns relevanssortering passade arbetet och därför lästes så många rubriker efter den sist valda artikeln innan slutsatsen drogs att det inte fanns fler relevanta artiklar. Sedan lästes abstract på sex som inte innehöll något exkluderat nyckelord. Efter det sorterades tre bort då de handlade om den australiensiska läroplanen, kompetensutveckling för lärare och hur små barn lär sig räkna men utan fokus på relationell förståelse. De tre som var kvar (Lüken &

Sauzet, 2021; Carr et al., 2011; Heirdsfield, 2011) valdes då de redogjorde för hur generalisering via olika strategier skapar förutsättningar för långsiktigt lärande.

Efter att ha läst dessa tre artiklar behövdes mer forskning om hur generalisering påverkade det långsiktiga lärandet inkluderas och då gjordes en ny sökning med sökorden *Relational understanding* AND *mathematics* och detta gav 75 träffar. 55 artiklar lästes då den sist valda artikeln hittades på träff 44. Sex artiklar sparades och inledning och resultat lästes på alla. Efter det exkluderades en artikel då den inte behandlade relationell förståelse. De fem artiklar som återstod (Skemp, 2006; Donovan et al., 2022; Utomo, 2020; Bajwa & Perry, 2021; Roberts, 2019) valdes då de på olika sätt behandlade hur relationell förståelse kan se ut samt hur den kan utvecklas.

Eftersom begreppet relationell förståelse baseras på Skemps (2006) forskning resonerade jag att det kunde finnas forskning som bearbetade liknande koncept men inte kallade det för relationell förståelse. Därför gjordes nästa sökning med orden *Mathematics* AND *sustainable learning.* Sökningen gav 24 träffar. Efter att ha läst alla rubriker och exkluderat artiklar med hjälp av exkluderingsorden valdes en artikel (Fritz-Stratmann et al, 2014). Denna valdes då den undersöker hur barn konceptualiserar tidiga matematiska koncept vilket är relevant för frågeställningen då det har kopplingar till generalisering.

3.1.3 Education Research Complete, ERC

Den första sökningen i ERC gjordes med sökorden *Relational understaning* AND *mathematics* AND *education.* Detta för att inkludera så mycket relevant forskning som möjligt från de båda sökmotorerna. Sökningen gav 63 träffar där 30 rubriker lästes då den sist valda artikeln hittades på plats 20. I nästa urvalsteg valdes fem artiklar. Efter detta exkluderades fyra artiklar då de inte hade relevant fokus i relation till frågeställningen. En behandlade inte generalisering, en var en studie som jämförde om olika läromedel och två var studier om högstadieelever. Den som slutligen valdes (Borensson, 2013) handlade om hur relationell förståelse ser ut och behandlade även undervisning om matematiska strategier.

Den andra sökningen gjordes med sökorden *Cognitive strategies* AND *grade 1* OR *grade 2* OR *grade 3* AND *mathematics*. Sökningen gav 27 träffar där alla rubriker lästes och tre valdes ut för vidare läsning. Efter läsning av abstrakt och resultat exkluderades en artikel då den var en jämförande studie i hur vuxna och barn förstår matematik. De två artiklar som valdes (Heinze et al, 2018; Fischer et al, 2019) valdes då de behandlade undervisning av matematiska strategier med relationell förståelse som mål.

3.2 Analysmetod och metodkritik

3.2.1 Analys och disposition av artiklar

I detta avsnitt presenteras en analys över artiklarna. Jag har valt att analysera artiklarna utifrån arbetets två frågeställningar som presenteras som underrubriker i resultatavsnittet. Detta för att frågeställningarna bygger på en progression. Den första bearbetar definitioner av generaliseringsförmåga och relationell förståelse samt hur de relaterar till varandra och den andra behandlar hur utvald forskning redovisar hur undervisning kan läggas upp för att förstärka förståelse och främja ett långsiktigt lärande. Därför redovisas resultatet i enlighet med denna progression. Den andra underrubriken har i sin tur delats upp i två delar där den första delen behandlar undervisning i matematiska strategier och den andra delen redovisar resultat från de artiklar som specifikt undersöker undervisning om ekvivalens och likhetstecknet. I tabellen markeras dessa artiklar med en stjärna (*). Några av artiklarna behandlar både definitioner och undervisningsstrategier, dessa redovisas i båda underrubrikerna och detta syns även i tabellen. Uppdelning har gjorts för att tydliggöra redovisningen av forskning i relation till frågeställningarna. Artiklarna delas upp enligt tabellen nedan.

Tabell 2. Disposition av artiklar utifrån frågeställning

Underrubrik 1. Definitioner	Underrubrik 2. Undervisning.
Sophian, C. (2013). Vicissitudes of Children’s Mathematical Knowledge: Implications of Developmental Research	Sophian, C. (2013). Vicissitudes of Children’s Mathematical Knowledge: Implications of Developmental Research

for Early Childhood Mathematics Education	for Early Childhood Mathematics Education
Fritz-Stratmann, A., Ehlert, A., & Klüsener, G. (2014). Learning support pedagogy for children who struggle to develop the concepts underlying the operations of addition and subtraction of numbers: the 'Calculia' programme	Heirdsfield, A. M., (2011). Teaching Mental Computation Strategies in Early Mathematics
Björklund, C. (2016). Learning about "Half": Critical Aspects and Pedagogical Strategies in Designed Preschool Activities.	Carr, M., Taasoobshirazi, G., Stroud, R., & Royer, J. M. (2011). Combined fluency and cognitive strategies instruction improves mathematics achievement in early elementary school.
Lüken, M. M., Sauzet O. (2021). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies	Lüken, M. M., Sauzet O. (2021). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies
Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding.	Roberts, N. (2019). The standard written algorithm for addition: Whether, when and how to teach it.
	Heinze, A., Arend, J., Gruessing, M., & Lipowsky, F. (2018). Instructional approaches to foster third graders' adaptive use of strategies: an experimental study on the effects of two learning environments on multi-digit addition and subtraction.
	* Borenson, H. (2013). A balancing act. *Teaching Children Mathematics*
	* Donovan, A. M., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M. W., & Matthews, P. G. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign
	* Fischer, J.-P., Sander, E., Gérard, S., Bruno, V., & Richard, J.-P. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade.
	* Utomo, D. P. (2020). The pattern of a relational understanding of fifth-grade students on integer operations

3.2.2 Metoddiskussion och begränsningar

I den valda metoden finns vissa begränsningar som tagits ställning till. I sökprocessen upptäcktes att det inte råder koncensus om områdets begrepp bland forskare. Det upptäcktes en svårighet i att hitta koncepten som söktes då olika forskare benämner samma sak på olika sätt. Detta har försökts kompenserats för genom att söka på både *relational understanding* och *sustaineble learning* samt både *strategies*, *Generalization* och *cognitive strategies*. Detta i försök att inkludera så mycket forskning som kunde vara relevant som möjligt. Det finns dock en risk i att något relevant har missats då det inte råder koncensus om vilka begrepp som används för konceptet som söktes.

I metoden har bara sökningar på engelska gjorts och det finns en risk att relevant forskning på svenska inte tagits med i resultatet. Eftersom det gick att få fram så mycket relevant forskning på engelska gjordes bedömningen att jag fått en överblick över forskningsfältet ändå.

4. Resultat och analys

I resultatavsnittet presenteras den forskning som valts ut för att besvara frågeställningen. Avsnittet har delats upp i två underrubriker för att separat besvara arbetets två frågeställningar. I metodavsnittet beskrivs en analys för hur artiklarna valts till vilken underrubrik. Analyser sker genom att dra paralleller mellan artiklarna och jämföra resultat. Artiklarnas resultat redovisas i detta avsnitt. Efter varje avsnitt sker en kort sammanfattning och analys av resultaten.

4.1 Generaliseringsförmåga och relationell förståelse

I artikeln "Vicissitudes of Children's Mathematical Knowledge: Implications of Developmental Research for Early Childhood Mathematics Education" skriver Catherine Sophian om elevers förmåga att generalisera kunskap. Hon definierar generaliserad kunskap som en kunskap som går att överföra till andra innehåll och sedan användas. Elevers kunskap måste vara så pass robust och befäst att de kan hämta kunskapen inom ett matematiskt fält och använda det i ett annat. Detta kallar Sophian för generaliserad förståelse (Sophian, 2013). Resultaten visar att ha en generaliserad kunskap är en förutsättning för att kunna bygga vidare på sin kunskap inom andra matematiska koncept (Sophian, 2013). Richard Skemp (2006) kallar denna typ av förståelse för relationell förståelse. Skemps forskning visar också att det är omöjligt att lösa nya typer av problem om det inte finns en relationell förståelse för grunden.

Annemarie Fritz-Stratmann (2014) har gjort en studie i hur elever konceptualiserar matematik i årskurs två. Att konceptualisera innebär att eleven förstår bakgrunden till vad som utgör ett matematiskt koncept. Konceptet som exemplifieras i studien är den dynamiska relationen mellan addition och subtraktion. Alltså att räknesätten kan relatera till varandra i delar och en helhet (ex. 5+3=8 & 8–3=5). Förstår eleven sambanden och hur delarna och helheten relaterar till varandra har eleven förstått konceptet. Fritz-Stratmann förtydligar definitionen genom att visa på skillnaden mellan en matematisk strategi och ett matematiskt koncept och menar att en strategi är olika steg för att lösa ett problem genom olika operationer medan ett koncept är de grundläggande idéer och fundament som utgör konceptet. Hon menar vidare att det är avgörande att elever lär sig att konceptualisera för att kunna progressera i sin kunskap, det räcker inte med att lära sig procedurer (Fritz-Stratmann, 2014).

Camilla Björklund (2016) har gjort en studie som undersöker hur barn i förskolan lär sig generalisera konceptet hälften. Barnen hade i början av studien inte en generaliserad kunskap av konceptet och det fanns många missuppfattningar. Björklund menar på att de kritiska aspekterna av konceptet måste belysas för att barnen ska kunna generalisera det. De kritiska aspekterna i konceptet hälften är att en bestämd helhet ska delas in i två lika stora delar. Denna aspekt belystes genom undervisning på olika sätt. För att förstå vad helhet innebar fick barnen dela upp olika grupper av saker i hälften. Det visade sig vara lätt när sakerna var likadana men det blev svårt att förstå vad helhet innebar om sakerna var grupperade. I en uppgift skulle eleverna dela upp sex leksaksdjur, (två kameler, två smurfar och två kycklingar). Eftersom leksakerna redan var indelade i för barnet redan kända kategorier två och två var det svårt för dem att se helheten sex. I undervisningen belystes här att innehållet i en kvantitativ helhet inte spelar någon roll för uppdelningen. Genom att visa på kritiska aspekter visas också vad konceptet inte är och detta hjälper generalisering (Björklund, 2016).

Miriam M Lüken och Odile Sauzet (2020) har i sin studie om barns i förskoleålders förmåga till att se mönster undersökt hur vägen till generalisering och därmed relationell förståelse ser ut i praktiken. Studien gick ut på att testa hur barn utvecklar en förståelse till mönster genom att testa om barnen kan fortsätta, reparera och repetera ett givet mönster. Forskarna identifierar fem nivåer i förmågan till att se matematiska mönster där det första steget är en fullständig oförståelse där barnet bara gissar på hur de ska fortsätta mönstret. Barnen går sedan till att kunna identifiera vilka karaktärsdrag som finns i mönstret (färger, former osv) för att sedan lära sig att kopiera mönstret genom en ”ett till ett” strategi, barnen kunde till exempel titta på mönstret och säga ”röd, blå, röd, blå…” och på så vis kunna fortsätta mönstret. I det sista steget kunde barnen se mönstret som helhet. Forskarna kallar det för ”*view of unit of repeat*” alltså att barnen kan se helheten i mönstret, var det börjar och slutar samt hur långt det är (Lüken & Sauzet, 2021). Med Sophians (2013) definition på generalisering går det att se dessa steg som en beskrivning för hur ett barn går från ovetandes om ett koncept till att ha en generaliserad förståelse för konceptet.

4.1.2 Slutsats

Det går att dra paralleller mellan ovan nämnda studier. Likheten är att alla studier bygger på att eleven behöver förstå bakgrunden till operationer de gör i matematik för få förutsättningar till att lära sig mer matematik. Alla använder dock inte Skemps (2006) begrepp ”relationell förståelse”. Björklund (2016) och Fritz-Stratmann (2014) använder begreppet koncept och konceptualisering och Sophian (2013) använder begreppet generaliserad kunskap. Lüken och Sauzet (2021) visar hur denna djupa förståelse kan se ut via barns mönsterseende.

Att förstå repetitiva mönster är viktigt för framtida matematisk inlärning (Lüken & Sauzet, 2020). Det eleven gör när den fortsätter eller upprepar ett mönster är att använda information den har för att ta reda på nästa steg. Enligt både Skemp (2006) och Sophian (2013) är det denna handling som definierar relationell förståelse då det är en förutsättning för ett fortsatt lärande att kunna använda sin kunskap för att komma vidare i ett problem. Därför kan man argumentera för att mönsterförståelse är en grund till matematisk inlärning.

4.2 Undervisningsstrategier för att utveckla relationell förståelse.

Ett flertal forskare har gjort studier i hur elever utvecklar sin relationella förståelse och hur undervisning kan stötta denna utveckling. I forskningen återkommer generalisering och matematiska strategier som viktiga faktorer för att få en relationell förståelse för matematik. I detta avsnitt av texten presenteras några olika forskares resultat i hur undervisning kan utveckla relationell förståelse.

4.2.1. Undervisning av matematiska strategier

En matematisk strategi kan definieras som en mental process som hjälper personen att nå ett mål i en aktivitet där information ska processas (Lüken & Sauzet, 2020).

Ann Margaret Heirdsfield (2011) har gjort en studie som fokuserar på hur lärare kan undervisa specifika matematiska strategier för att elever ska bli mer flytande och effektiva i huvudräkning. I studien handleder hon lärare i åk två i hur de ska undervisa ”mental computation”. Mental computation eller huvudräkning innebär att elever räknar ut saker i huvudet med hjälp av valda strategier. Studien visar att det finns några nycklar till effektiv undervisning. I undervisningen fick lever pröva sig fram till att hitta olika typer av strategier. I Heirdsfields (2011) studie visade det sig att eleverna blev bättre på huvudräkning när de själva fick välja bland olika strategier och fick pröva sig fram till de som passade uppgiften bäst. Lärarna handleddes i att stötta eleverna i att se mönstren och kopplingarna i strategierna, identifiera vilken nivå eleven låg på samt ha ett öppet klassrumsklimat där det var tillåtet att experimentera med matematiken. Det undersökande arbetssättet bidrog till en metaförståelse om strategier där eleverna förstod att de använde en strategi och vad fördelen var med detta (Heirdsfield, 2011).

Martha Carr et. al (2011) har gjort en studie om kognitiva strategier, alltså strategier där man löser en uppgift med tankekraft, t.ex. genom att ha en internaliserad tallinje. En kognitiv strategi kan vara att ”räkna vidare” i en additionsuppgift. Att räkna sex plus fem som (7, 8, 9, 10, 11) alltså räkna vidare från sex i stället för att börja om från noll. En grupp elever fick undervisning i specifika strategier och det visade sig att denna grupp blev bättre på att självständigt använda strategierna jämfört med andra testgrupper. De fick också undervisning i metaförståelse om strategierna. Eleverna fick alltså undervisning i att de använde strategier och varför dessa var bra. Detta gjorde att de använde strategierna mer självständigt och i högre grad valde en strategi som underlättade lösningen av problemet (Carr et. al, 2011).

Sophian (2013) forskar om hur elevers utveckling av matematiska strategier kan hjälpa dem i deras utveckling. Elever behöver få olika strategier presenterade för sig och de utvecklar sina strategier och därmed generalisering genom att öva på strategin med färdighetsträning, öva strategin med heterogena problem samt att elever får prata om och förklara sina tankar med strategin. Dessa tre undervisningsstrategier tillsammans gör att förståelsen befästs (Sophian, 2013). Det gäller att som lärare ha en långsiktig överblick över vilket matematikinnehåll eleven kommer att möta och undervisa så att eleven är väl rustad och kan bygga på kunskaperna de får i lågstadiet. Lärare behöver identifiera vilka aspekter av innehållet som är viktiga att ha en fördjupad kunskap om i relation till den större bilden av matematik. Exempel på detta är talförståelse (tallinje, taluppfattning m.m.). Detta görs genom att generalisera koncepten som man introducerar eleverna för (Sophian, 2013).

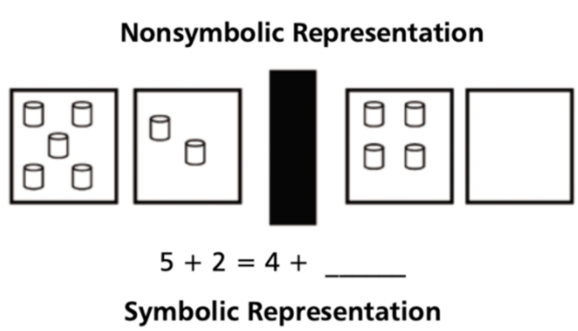
I matematikundervisning är det vanligt att lära ut olika procedurer eller tillvägagångssätt för att lösa olika problem (Roberts, 2019). Detta är dock inte tillräckligt för att skapa en kunskapsbank som stöttar progression. Eleven behöver också konceptuell förståelse för matematik för att utvecklas. De behöver förstå de matematiska koncepten men behöver också få undervisning i tillvägagångssätt. Det är viktigt att elever får reflektera över strategier och komma fram till vissa själva men de behöver också träna på att få flyt i undervisade procedurer. Det är för mycket krävt av en lågstadieelev att hitta på alla strategier själv. För en matematisk progression krävs dock att eleven förstår hur procedurerna fungerar och kan välja ut vilken som passar när (Roberts, 2019).

Aiso Heinze et. al (2018) jämför två olika undervisningssätt med syfte att elever ska lära sig matematiska strategier. Det undersökande arbetssättet problematiseras och frågeställningen i studien är om elever får en mer hållbar förmåga att använda strategier om de har kommit på dem själva genom undersökning eller om en lärare har berättat om strategierna och visat hur och varför de fungerar. Eleverna i studien blev uppdelade i två grupper, en som arbetade undersökande och en som fick redan etablerade matematiska strategier förklarade och tränade på dessa. Det visade sig att på kort sikt fungerade undervisningssätten ungefär lika bra. Båda grupperna elever kunde använda strategierna effektivt, dock använde de elever som hade fått strategierna förklarade oftare mer avancerade strategier. På lång sikt kunde gruppen som arbetat undersökande och kommit fram till strategier via egna resonemang använda vissa strategier mer hållbart och var bättre på att välja rätt strategi för rätt typ av problem. Resultatet visar också att det var en stor utmaning för eleverna att resonera sig fram till effektiva strategier och därför kanske det ändå är mer effektivt att presentera strategierna i undervisningen. Dock krävs det då att de bakomliggande strukturerna i strategierna förklaras noga för att säkerställa ett hållbart lärande (Heinze et. al 2018).

4.2.2 Förståelse av ekvivalens och likhetstecknet

Många forskare argumenterar för vikten av en relationell förståelse av likhetstecknet. Elever som tror att likhetstecknet betyder ”svar” har svårare att sedan förstå algebra eller uppgifter där det sker en uträkning på båda sidor likhetstecknet. Detta kallas att ha en operativ förståelse för likhetstecknet. Det är viktigt att tidigt generalisera förståelsen för likhetstecknet genom varierade uppgifter för att undvika missförstånd, som senare i utbildningen blir svåra att hantera (Sopian, 2013; Borenson, 2013; Donovan et. al 2022; Fischer et. al 2019; Utomo 2020). Nedan följer en redogörelse för hur olika forskare undersökt undervisningssätt för att öka den relationella förståelsen för ekvivalens och likhetstecknet.

Henry Borenson (2013) har gjort en studie som undersöker hur elever förstår likhetstecknet. Han har sett att en generaliserad förståelse för matematik inte kommer automatiskt utan denna förmåga måste stöttas genom undervisning. I sin undersökning menar Borenson att lärare bör undervisa med elevernas förkunskaper i åtanke. Det är viktigt att inte förminska elevernas förståelse om likhetstecknet utan belysa mångsidigheten av konceptet och vara tydlig med att eleverna ska fördjupa sina kunskaper i stället för att lära om på nytt. Han visar också på att ett effektivt sätt att lära ut är att representera likhetstecknet på ett konkret sätt, i detta fall genom en bildrepresentation av konceptet. När eleverna förstår detta går undervisningen vidare till ett abstrakt symbolspråk. Han ger ett undervisningsexempel som bilden nedan där det finns både en symbolisk representation och en bildlig (Borenson, 2013).



(Borenson, 2013)

Donovan et. al (2022) beskriver två aspekter av att förstå ekvivalens, ”sameness” och ”substitutive”. ”Sameness” eller likvärdighet (min översättning) innebär att förstå aspekten att värdet på båda sidorna av likhetstecknet måste vara samma, inte att likhetstecknet betyder ”svar”. Aspekten ”substitutive” eller utbytbarhet (min översättning) innebär att uttryck kan bytas ut mot ett likvärdigt uttryck (t.ex. 3+4 kan bytas ut mot 3+3+1). Studien går ut på att testa om elever i fjärde och femte klass får större relationell förståelse för ekvivalens om de har förståelse för och kan använda dessa två aspekter. Det undersöks även om det spelar roll om eleven bara förstår aspekten likvärdighet eller om kombinationen likvärdighet och utbytbarhet är avgörande för relationell förståelse. Eleverna i studien delades upp i tre grupper. En grupp fick undervisning i ”sameness”, en i ”sameness” och ”substitutive” samt en kontrollgrupp.

Resultatet visar att det var stor skillnad på de två första grupperna och kontrollgruppen. De två grupperna som hade fått specifik undervisning i ekvivalensaspekterna hade en större relationell förståelse för likhet än kontrollgruppen. Den gruppen som hade fått undervisning i likvärdighet och utbytbarhet av uttryck hade en större relationell förståelse än gruppen som bara fått undervisning i likvärdighet men skillnaden var inte så stor. Den gruppen som hade fått undervisning i bägge aspekterna hade också bättre resultat i att räkna algebra. Sammanfattningsvis visar studien att förståelsen för uttrycks utbytbarhet är en kritisk aspekt för en relationell förståelse för ekvivalens och för att kunna utnyttja sin konceptualiserade kunskap för att skapa strategier för att lösa mer avancerad algebra (Donovan et. al 2022).

Jean-Paul Fischer et. al (2019) visar att det är vanligt att elever missförstår likhetstecknets fulla betydelse. Om elever har en operativ förståelse för likhetstecknet kan det få negativa konsekvenser längre fram i skolgången, speciellt inom algebra. Fischers et. al (2019) studie behandlar undervisningsprogrammet ACE (Arithmetic Comprehension at Elementary school) vars syfte är att undersöka om det går att undervisa så att elever får en relationell förståelse för likhetstecknet och undvika formatet ”uttryck = svar”. I programmet fick eleverna arbeta med och jämföra storheten av tal utan att räkna. Till exempel fick de berätta vilket som uttryck som hade störst värde 5+3 eller 6+4. Detta för att rikta bort fokuset från själva additionsoperationen och i stället fokusera på talens egenskaper. De fick också arbeta med långa additionskedjor (ex. 9 + 1 + 4 + 6 + 5 + 5 + 8 + 2) för att lära sig se olika strategier för att addera i stället för bara vänster till höger. Eleverna fick också i problemlösningsuppgifter stanna upp och reflektera över vilken information som fanns i problemet innan de började räkna. De fick också träna mycket på att dela upp tal och se sambandet mellan addition och subtraktion. Övergripande handlar programmet om att eleverna ska lära sig att reflektera över matematiska uppgifter och inte bara räkna på automatik. Hypotesen var att om elever blir utsatta för olika sätt att se och skapa ekvivalens ska deras relationella förståelse för likhetstecknet och ekvivalens öka. Resultatet visar att elever i programmet fick större förståelse för ekvivalens än kontrollgrupper men också att det trots programmet fortfarande är många elever som har stora svårigheter med att få en relationell förståelse för likhetstecknet (Fischer et. al, 2019).

Dwi Priyo Utomo (2020) undersöker vilket typ av stöd som är mest effektivt för att få en relationell förståelse för likhetstecknet när en balansvåg används som verktyg. Målet var att få mer klarhet i vilken aspekt av verktyget balansvåg som ökade elevernas förståelse för likhetstecknet mest och genom det få förståelse för vilken aspekt lärare bör undervisa. Eleverna i studien blev delade i tre grupper och testades genom att spela ett datorspel som innehöll olika aspekter av verktyget balansvågen. Eleverna fick se en våg som inte var balanserad och fick instruktion att skapa balans genom att lägga till klossar. Grupperna fick arbeta med olika aspekter av balansvågen. En grupp fick se hur balansvågens vågskålar rörde sig upp och ner beroende på om det fanns lika många klossar i vågskålarna eller inte. En grupps balansvåg rörde sig inte men siffrorna eleverna skrev visualiserades i de statiska vågskålarna. Den sista gruppen använde inte en balansvåg utan fick bara siffrorna visualiserade i klossar på en platt yta. Resultatet visade att den andra gruppen fick bäst resultat. Utomo (2020) tror att detta beror på att den dynamiska balansvågen inte utmanade elevernas matematiska tänk tillräckligt mycket för att skapa konceptualisering om likhet. Däremot när eleverna fick se den statiska vågen var de tvungna att reflektera över konceptet balans och fick då en djupare matematisk förståelse. Slutsatsen blev att det är viktigt att lärare vet vilka aspekter av ett koncept som faktiskt tar elever framåt i utvecklingen och vilka som inte är hjälpsamma (Utomo 2020).

4.2.3 Slutsats

Dessa studier använder olika pedagogiska strategier för att elever ska fördjupa sin kunskap. De alla har målet att eleven självständigt ska kunna förstå och använda matematiska strategier som verktyg i sin utveckling. Dock finns det en motsättning i om det är mest gynnsamt att presentera redan etablerade strategier för elever för att sedan öva in dessa (Carr et. al, 2011; Sophian, 2013) eller om det är bättre att arbeta undersökande och låta eleverna skapa strategier själva (Heirdsfield, 2011; Fischer et. al, 2019). Två studier (Roberts, 2019; Hienze et.al 2018) visar på att det ger bäst resultat att presentera etablerade strategier samt låta elever reflektera över hur dessa fungerar. Det gemensamma för alla artiklar är att det är avgörande för matematisk progression att elever kan använda strategier självständigt och förstå bakgrunden i strategin.

Analyser av dessa artiklar ger slutsatsen att matematiska strategier och relationell förståelse hör ihop. Slutsatsen är att när eleven kan välja strategi innebär det att den har generaliserat innehållet i matematiken och detta visar i sin tur på relationell förståelse.

Artiklarna om likhetstecknets betydelse (Borenson, 2013; Donovan et.al, 2022; Fischer et.al 2019; Utomo, 2020) visar alla på hur inlärning av matematiska strategier skapar generaliseringar och därmed förutsättningar för Skemps (2006) definition av relationell förståelse. När Lüken och Sauzets (2021) definition på strategier, Sophians (2013) definition av generalisering samt Skemps (2006) definition av relationell förståelse slås ihop med studierna om undervisning visas en växelverkan mellan relationell förståelse och strategier. Det är genom den relationella förståelsen och generalisering av koncept eleverna kan skapa strategier. Studiernas gemensamma resultat visar att detta är ett sätt att skapa långsiktigt självständigt lärande.

5. Diskussion och sammanfattning

I detta avsnitt diskuteras forskningsresultaten i relation till frågeställningen. Frågeställningen handlade om generaliseringsförmåga och relationell förståelse. Avsnittet behandlar en reflektion över vad som hittades i sökningarna och vilken forskning som inte hittats.

Det råder koncensus i att en djup matematikförståelse är något väldigt avgörande för ett långsiktigt hållbart lärande, alltså ett lärande som eleven kan använda för att utvecklas. Det råder dock inte koncensus i vilket undervisningssätt som är mest effektivt för att nå relationell förståelse. Vissa resultat visar att det är bättre med olika typer av undersökande och resonerande för att elever ska hitta mönster och generella saker i matematiken för att kunna förstå den. Andra resultat visar att det är för stora krav att ha på en lågstadieelev och att läraren behöver visa på sambanden, undervisa strategier och förklara varför det fungerar för att eleverna ska få relationell förståelse. I studierna får dock båda undervisningsstrategierna i stora drag samma resultat. Eleverna blir lite bättre på att förstå och använda strategier om undervisningen fokuserar på detta.

Studierna undersöker på olika sätt vilka framgångsfaktorer det finns för att nå detta hållbara lärande. I resultatet redovisas flera olika teorier och undervisningssätt med syfte att hitta nycklar till relationell förståelse. I frågeställningen undrade jag hur matematiska strategier påverkar relationell förståelse och generalisering. I LGR22 står det att elever ska lära sig att välja rätt strategi för att lösa olika typer av problem (Lgr22, 2022).Studierna i denna kunskapsöversikt använder ofta användandet av strategier som definition eller måttstock för att se om eleverna har förstått matematiska koncept. Kan eleverna använda strategierna självständigt anses detta bero på att de har en relationell förståelse för konceptet och strategierna. Detta går i linje med LGR22s kunskapskrav för matematik i lågstadiet.

Det som verkar saknas på forskningsfältet är studier om faktiska matematiska mönster. I inledningen diskuteras Lüken och Sauzets (2021) definition av matematik som strukturer och mönster och dessa måste förstås för att kunna förstå matematik. Detta kan tolkas som att någon typ av helhetsbild av matematik är bra att sträva efter. När denna definition av matematik kopplas till Skemps (2006) relationella förståelse är det tydligt att en framgångsfaktor för matematikförståelse är att elever på ett relationellt sätt ska förstå sambanden och mönstren i den övergripande matematiken. I studierna har dock mest separata matematiska koncept diskuterats och undersökts. Jag finner det intressant att många av studierna får relativt dåliga resultat. I Fischers et. al (2019) studie t.ex. undervisas eleverna i förståelsen för ekvivalens i ett helt år men ändå i eftertestet är det bara 29% som kan svara rätt på frågan ($7 \times 5 = 4 \times 5 + \_ \times \_$). Studien visar på en utveckling, men fortfarande efter studien är det den största delen av eleverna som inte har en relationell förståelse för konceptet (Fischer et. al 2019). När paralleller dras mellan definitioner av förutsättningar för matematikförståelse och studiernas resultat identifieras ett glapp. Det verkar inte finnas någon forskning som diskuterar lågstadieelevers helhetsbild av matematik.

I arbetets inledning undrar jag om generaliserad förståelse av olika matematiska koncept kan vara ett hjälpmedel för eleven att hitta matematiska vägar mer effektivt. Arbetets frågeställning vill undersöka om förmågan till generalisering är en nyckel till att få övergripande förståelse för matematiken och just hur denna förmåga påverkar den långvariga förståelsen har inte hittats mycket av. Sophian (2013) är den enda som beskriver denna generaliseringsförmåga och hennes resultat visar att denne är avgörande för att skapa en helhetsbild av matematik. Själva förmågan till att generalisera skapar förutsättningar för relationell förståelse (Sophian, 2013). Risken jag identifierar blir att även om eleverna förstår separata koncept på ett relationellt sätt, kan de koppla ihop dem och se större matematiska samband? Jag undrar fortfarande, likt i inledningen, om det är förmågan till generalisering som gör att elever får större förutsättningar att bli mer självständiga i matematikinlärning och lär sig att bygga broar mellan det de redan kan och nästa steg.

En annan faktor som inte är en så stor del i forskningsfältet är hur elevers ålder påverkar förmåga till lärande. I studierna finns det en nivåskillnad i matematiken elever testas i relation till deras ålder men frågan kvarstår hur elevers ålder påverkar deras förmågor. Faktorn ålder kopplat till förmåga kan kopplas till ovan nämnda generaliseringsförmåga och helhetssyn på matematik, kanske är det för mycket krävt av en lågstadieelev att utveckla en generaliseringsförmåga på det sättet att de kan dra slutsatser om matematik som gör att de blir mer självständiga i sin utveckling?

Dessa olika faktorer utgör tillsammans ett nytt intresse för vidare forskning. Vilka faktorer är det som påverkar elevers bristande relationella matematikförståelse i lågstadiet? Är det förmågan till generalisering som inte är psykologiskt utvecklad ännu eller är får inte eleverna tillgång till den undervisning som behövs för att en helhetsbild av matematik ska utvecklas?

Vidare skulle det var intressant att undersöka:

- Vilka matematiska förmågor är det som är viktiga om elever ska få en helhetsbild av matematik?
- Vilken faktor är det som gör att elever i lågstadieålder inte har en generaliserad bild av matematik? Undervisningen, elevens ålder och mognad eller en kombination?

6. Referenser

Bajwa, N. P., & Perry, M. (2021). Features of a pan balance that may support students' developing understanding of mathematical equivalence. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 1-27. DOI: 10.1080/10986065.2020.1700587

Björklund, C. (2016). Learning about "Half": Critical Aspects and Pedagogical Strategies in Designed Preschool Activities. *Scandinavian journal of educational research, 62*(2), 245-263. https://doi.org/10.1080/00313831.2016.1212264

Björklund, C. & Grevholm, B. (2014). *Lära och undervisa matematik: från förskoleklass till åk 6*. (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Borenson, H. (2013). A balancing act. *Teaching Children Mathematics*, *20*(2), 90-94. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.20.2.0090

Carr, M., Taasoobshirazi, G., Stroud, R., & Royer, J. M. (2011). Combined fluency and cognitive strategies instruction improves mathematics achievement in early elementary school. *Contemporary Educational Psychology*, *36*, 323–333. doi:10.1016/j.cedpsych.2011.04.002

Donovan, A. M., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M. W., & Matthews, P. G. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM – Mathematics Education*, *54*, 1199–1213. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y

Fischer, J.-P., Sander, E., Gérard, S., Bruno, V., & Richard, J.-P. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, *34*, 439–456. https://doi.org/10.1007/s10212-018-0384-y

Fritz-Stratmann, A., Ehlert, A., & Klüsener, G. (2014). Learning support pedagogy for children who struggle to develop the concepts underlying the operations of addition and subtraction of numbers: the 'Calculia' programme. *South African Journal of Childhood Education*, *4*(3), 136-158. ISSN: 2223-7674

Heinze, A., Arend, J., Gruessing, M., & Lipowsky, F. (2018). Instructional approaches to foster third graders' adaptive use of strategies: an experimental study on the effects of two learning environments on multi-digit addition and subtraction. *Instructional Science*, *46*, 869-892. https://doi.org/10.1007/s11251-018-9457-1

Heirdsfield, A. M., (2011). Teaching Mental Computation Strategies in Early Mathematics *Young Children. 2011*, 96-102.

Lüken, M. M., Sauzet O. (2021). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23* (1), 28-48. DOI: 10.1080/10986065.2020.1719452

Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: Reviderad 2022. (2022). Skolverket. https://www.skolverket.se/getFile?file=9718

Mills, T. (2018). Towards a relational understanding of the regression line. *Australian Senior Mathematics Journal, 32*(1).

Roberts, N. (2019). The standard written algorithm for addition: Whether, when and how to teach it. *Pythagoras*, *40*(1). a487. https://doi.org/10.4102/ pythagoras.v40i1.487

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95

Sophian, C. (2013). Vicissitudes of Children's Mathematical Knowledge: Implications of Developmental Research for Early Childhood Mathematics Education. *Early Education and Development*, *24*, 436–442. DOI: 10.1080/10409289.2013.773255

Utomo, D. P. (2020). The pattern of a relational understanding of fifth-grade students on integer operations. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education. 5*(2), 119-129. DOI: 10.23917/jramathedu.v5i2.9545

Östlundh, L. (2022). Informationssökning. I F. Friberg (Red.) *Dags för uppsats: vägledning för litteraturbaserade examensarbeten* (s. 79-109). (Fjärde upplagan). Studentlitteratur.