Undersöka och upptäcka matematik med IKT

Hanna Palmér, Linneuniversitetet; Ulrika Ryan, Malmö Högskola & Ola Helenius, NCM

Matematikundervisning är i mycket hög grad präglad av uppgiftslösning. Formellt, om man exempelvis tittar i kursplaner, så har uppgifter ingen särskilt framträdande roll, men i praktiken består en stor del av elevernas lektionstid av arbete med uppgifter. Uppgifter utgör vanligen både de övningar som antas bidra till lärandet och de tester som används vid kunskapskontroller. En stor del av arbetet med uppgifter består av att elever använder mer eller mindre standardiserade metoder för att lösa en viss typ av uppgifter. Ofta kallas sådana uppgifter för rutinuppgifter, just för att det finns en speciell rutin, procedur eller algoritm som eleverna förväntas använda för att lösa uppgifterna. I en undersökning av 60 lektioner (fördelade på lika många lärare) i grundskolan i Sverige 2009 visade det sig att övning av procedurella förmågor var klart dominerande och förekom i mer än dubbelt så hög utsträckning som exempelvis problemlösning, resonemang och kommunikation. Det visade sig också att elevers arbete med uppgifter, enskilt eller i par, upptog närmare 60 % av lektionstiden. Inom denna arbetsform förekom övning av procedurer cirka 90 % av tiden (Bergqvist m fl, 2009).

Kursplanen i matematik (Skolverket, 2011a) ligger i linje med ett stort antal utvecklingsarbeten och ramverk som har tagits fram sedan slutet på 1980-talet och framåt. Genom att beskriva matematikkunskap i termer av flera olika förmågor, där förmåga att hantera rutinuppgifter bara är en, vill konstruktörerna av ramverken att undervisningen ska bli mer undersökande och mindre rutinuppgiftsorienterad. Eleverna ska alltså ges möjlighet att möta matematiska problem där de inte har någon färdig lösningsmetod utan måste ägna sig åt att formulera, värdera och jämföra strategier, för att sedan kunna välja en lämplig metod och pröva om den kan användas för att behandla det aktuella problemet. Om eleven lyckas resonera sig fram till ett svar, så ska detta svar kunna tolkas i förhållande till den givna problemställningen. Eleverna bör i matematikundervisningen således ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att formulera, värdera, jämföra, välja, pröva, tolka, samtala om, argumentera och redogöra för egna och andras matematiska idéer och konstruktioner (NCTM 2000, Kilpatrick, Swafford, Findell 2001, Niss & Jensen 2002).

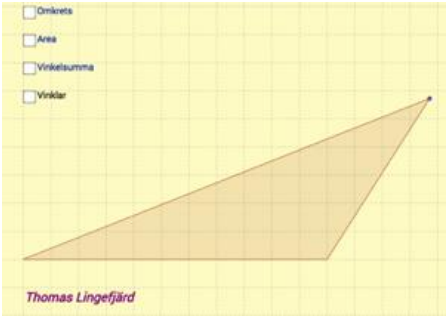
I kursplanen i matematik finns likartade idéer fångade i formuleringarna att undervisningen ska ge eleverna möjlighet att utveckla sin förmåga att *värdera valda strategier och metoder* samt s*amtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser* (Skolverket 2011a). Ett sätt att uppnå dessa mål är att tillämpa undersökande arbetssätt där eleverna själva tar (och vänjer sig vid att ta) ansvar för att ställa frågor, göra antaganden, samt formulera och pröva hypoteser. När lärare använder undersökande arbetssätt i sin undervisning behövs en plan för hur elevernas undersökningar ska orkestreras, särskilt avseende på val av

uppgifter och verktyg för att lösa uppgifterna. Uppgifter som är lämpliga för att utveckla exempelvis elevers förmåga att resonera matematiskt är inte nödvändigtvis desamma som uppgifter lämpliga för att öva på rutiner eller procedurer.

Att många elever ägnar alltför mycket tid åt att lösa rutinuppgifter lyfts dock inte bara fram inom den moderna matematikdidaktiken (Hiebert, 2003) utan har i själva verket diskuterats i långt över 100 år. Att bryta rutinuppgifternas dominans verkar alltså inte vara enkelt. Ett möjligt skäl till detta är att det helt enkelt är svårare att konstruera lämpliga uppgifter för ett undersökande arbetssätt. I alla fall om eleverna både ska få utrymme att undersöka problemställningar och ta egna strategiska initiativ men också ges förutsättningar att uppnå planerade lärandemål. I den här texten riktas fokus mot hur digitala verktyg kan användas för att eleverna ska få möjlighet att undersöka och upptäcka matematik. Undersökande arbete i matematikundervisningen syftar inte enbart till att eleverna ska lösa matematikuppgifter och upptäcka matematiska samband. När elever arbetar med en uppgift så övar de också på själva metoden att undersöka matematiska fenomen. Om uppgiften kombineras med att eleverna måste redogöra för sina undersökningar, sina förmodanden och upptäckter, skapas dess-utom en naturlig arena för att utveckla matematisk kommunikationsförmåga och förmåga att föra och följa matematiska resonemang. På så sätt använder och fördjupar eleverna sin förståelse av matematiska begrepp och matematisk terminologi.

Ett exempel: Trianglars grundläggande egenskaper

Detta exempel utgår ifrån en applet i Geogebra där eleverna ges möjlighet att laborera med en digital konstruktion av ett geometriskt objekt för att utveckla sin begreppsförmåga. ”Grundläggande geometriska objekt” och ”grundläggande geometriska egenskaper hos dessa objekt” utgör centralt innehåll i både årskurs 1-3 och 4-6. Genom undervisningen ska eleverna även ges möjlighet att utveckla förmågan att ”använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp” (Skolverket, 2011a, s.63). Förmågan att *använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp* omfattar dels kunskap om matematiska begrepp och deras samband med varandra, dels tillämpning av begreppen och sambanden genom resonemang om likheter och skillnader mellan geometriska objekt, till exempel gällande sidor, kanter och hörn. Det geometriska objektet i detta exempel är triangeln, där appleten i Geogebra ger förutsättningar för en dynamisk undervisning där olika idéer kan undersökas, diskuteras och jämföras med varandra(https://tube.geogebra.org/m/2648087). Undersök gärna nu hur appleten fungerar så blir det lättare att följa med i det följande.



Figur 1.

I appleten finns redan en triangel konstruerad. Eleverna kan förändra utseendet på denna triangel genom att dra i ett av hörnen. Triangelns omkrets förblir dock konstant. Användaren kan välja om värdena för omkrets, area, vinkelsumma eller vinklar ska vara synliga eller inte. Eleverna behöver inte vara bekanta med dessa begrepp på förhand, appleten kan användas för att introducera dessa begrepp i undervisningen. Appleten kan användas för att utforska olika egenskaper hos trianglar och läraren kan välja uppgift anpassad till elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper. Eftersom appleten är dynamisk kan eleverna laborera med den digitala konstruktionen men för att undervisningen ska leda mot utvalda mål är det viktigt att ha väl valda frågeställningar som eleverna ska arbeta med så att deras uppmärksamhet i största möjliga mån riktas mot de matematiska idéer som ska utforskas. Dessutom behövs en plan för att ta hand om och utveckla elevernas idéer i den avslutande diskussionen.

Nedan följer några förslag på frågeställningar där eleverna ges möjlighet att undersöka och upptäcka *grundläggande egenskaper* hos trianglar med hjälp av appleten. Vilka grundläggande egenskaper som lämpligen undersöks beror på elevernas förkunskaper. Att anpassa uppgifter till den egna undervisningen och elevernas förkunskaper är en del av orkestreringen av en lektion. De uppgifter som väljs ska erbjuda en utmaning för eleverna så att de blir intressanta att undersöka och diskutera. Med fördel kan eleverna arbeta i par så att de ges möjlighet att argumentera för sina idéer samt att föra och följa resonemang kring olika uppgifter. En inledande uppgift kan vara att låta eleverna undersöka om de kan göra en figur som inte är en triangel.

Kan ni göra en figur som inte är en triangel?

Uppgiften kan kanske framstå som besynnerlig då det enbart går att konstruera trianglar i appleten men genom frågan kan elevers uppfattningar, och eventuella missuppfattningar, om trianglar synliggöras. I kommentarmaterialet till Lgr11 framhålls att eleverna tidigt ska få undervisning om och därigenom förståelse för att position inte har någon betydelse för den geometriska formen. För trianglar innebär detta att förstå att en triangel fortfarande är en triangel även om den vrids och intar en annan position (Skolverket, 2011b). Yngre elever utvecklar ibland idéer om att trianglar ska ”stå på en sida” samt att enbart liksidiga eller likbenta trianglar är trianglar. Genom aktiviteten kan sådana missuppfattningar synliggöras och i gemensamma diskussioner utifrån elevernas undersökningar av figuren i appleten kan eleverna utveckla förståelse för vilka *grundläggande egenskaper* som är gemensamma för alla trianglar samt för att positionen inte har någon betydelse för den geometriska formen. Begrepp som *hörn* och *sida* kommer troligen att utgöra en del av diskussionerna om likheterna mellan de trianglar som konstrueras medan *vinklar* och *yta* kan användas för att beskriva skillnader mellan de trianglar som konstrueras. Centralt i diskussionen blir också vad som skulle krävas för att figuren inte längre skulle vara en triangel. Vilka förändringar skulle kunna göras – respektive får inte göras – om figuren fortfarande ska vara en triangel? Är figuren fortfarande en triangel om den har rundade hörn? Är figuren fortfarande en triangel

om en sida är böjd? Är figuren fortfarande en triangel om sidorna blir dubbelt så breda? Vilka förändringar påverkar de grundläggande egenskaper som är gemensamma för alla trianglar och vilka påverkar inte dessa grundläggande egenskaper?

Om omkrets eller area varit aktiverat i appleten har eleverna kanske uppmärksammat värdena för dessa. Diskussioner kan då föras kring vad beteckningarna står för samt varför den ena varierar och inte den andra. Vad skulle krävas för att omkretsen, *O* ska variera? Skulle arean, *A* fortfarande variera om *O* varierade? osv. Utifrån en sådan diskussion kan eleverna få i uppdrag att konstruera en triangel med så stor area som möjligt (omkretsen är fortfarande konstant).

Hur ska triangeln se ut för att den ska ha så stor area som möjligt?

Genom uppgiften kan eleverna utveckla förståelse för omkrets och area samt relationer däremellan. Uppgiften fungerar både för elever som är bekanta med begreppen omkrets eller area sedan tidigare och elever som inte är det. Elever som inte är bekanta med begreppen sedan tidigare kan behöva en introduktion där uppgiften kläs i en kontext som möjliggör förståelse för uppdraget utan användning av begreppen omkrets och area. Till exempel kan eleverna få i uppgift att göra en hage till hästar där hagen ska ha formen av en triangel. De har dock bara 31 meter staket. Hur ska de bygga hagen för att hästarna ska få så stor yta som möjligt att röra sig på?

Innan eleverna får utforska problemet med hjälp av appleten kan de få göra en skiss på hur de tror att hagen kommer att se ut. Vilken ”typ av triangel” tror de har störst yta, är det en rätvinklig triangel, en likbent triangel? Vilka hypoteser har eleverna och hur argumenterar de för sina hypoteser? (Detta innebär inte att eleverna måste använda eller vara bekanta med dessa begrepp. Begreppen kan introduceras men elevernas förslag kan också beskrivas med andra, av dem valda, begrepp.) I appleten kan eleverna sedan konstruera en triangel som motsvarar deras skiss. Uppmärksamma eleverna på vad som händer med *O* och *A* när de konstruerar sina trianglar. Vilket värde har *O* i appleten? Vilket värde har *A*? Varför varierar *A* och inte *O*? Vad skulle krävas för att *O* skulle variera? Skulle *A* fortfarande variera om *O* varierade? Kan eleverna göra så att *A* blir noll? Efter att eleverna utforskat frågor likt ~~detta~~ dessa får de återigen konstruera den triangel som motsvarar deras skiss? Kan de, och i så fall hur kan de ta reda på om deras triangel har den största möjliga arean?

I appleten kan eleverna även undersöka vinklar och vinkelsumma. I sitt tidigare arbete med appleten har eleverna sett trianglar av olika slag. Nu kan de få fundera på hur en triangel som benämns rätvinklig ser ut.

Konstruera en rätvinklig triangel

Låt eleverna skapa trianglar och jämföra dessa, för att sedan i en gemensam diskussion enas om vilka grundläggande egenskaper rätvinkliga trianglar har. Vilka av de trianglar eleverna har konstruerat är rätvinkliga? Kan rätvinkliga trianglar se ut på olika sätt? Liknande under-

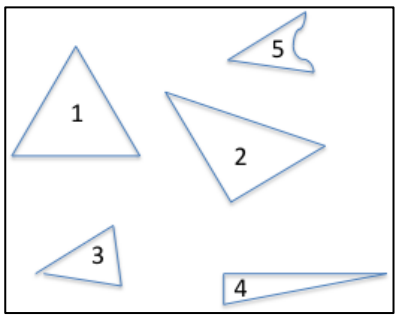
sökningar kan göras av trubbvinkliga, spetsvinkliga, liksidiga och likbenta trianglar. Genom uppgifterna kan eleverna utveckla förståelse för vinklar som en *grundläggande egenskap* hos trianglar. Uppgiften kan användas för att introducera begreppen men också för att utforska redan introducerade begrepp ytterligare. Genom att enbart aktivera värdena för vinklar kan eleverna få utforska vad de tror talen beskriver och varför de ändras när de förändrar triangelns utseende. Utifrån en sådan undersökning kan eleverna utmanas att konstruera en triangel med så stor vinkelsumma som möjligt.

Som tidigare nämnts är inte syftet med att använda det digitala verktyget att underlätta vägen fram till ett svar utan att erbjuda eleverna väl genomtänkta utmaningar som möjliggör utforskande av matematik. Det är inte appleten som löser uppgifterna åt eleverna utan eleverna som löser uppgifterna med hjälp av appleten, och speciellt undersöker de i det här fallen olika matematiska egenskaper hos triangeln. De får därmed, utifrån sitt arbete med appleten och de gemensamma uppföljande diskussionerna, utforska centrala matematiska begrepp. Appletens dynamiska karaktär möjliggör i dessa fall att eleverna kan experimentera med triangelns olika egenskaper.

Alla ovan föreslagna uppgifter bygger på samma enkla applet till Geogebra. De olika uppgifterna lyfter fram olika matematiska innehåll, men relativt likartade matematiska förmågor. Uppgifterna kan huvudsakligen inlemmas i en liknande didaktiskt organisation av lektionen som helhet, där elevernas egna undersökningar är en central del. Men om eleverna arbetar enbart på egen hand med en gissa-och-pröva metod finns det risk att de inte lägger märke till den matematik som situationen är tänkt att belysa. Därför är det viktigt att det arbete som eleverna förväntas genomföra både introduceras och följs upp på ett genomtänkt sätt. Detta har vi tidigare i modulen beskrivit med hjälp av strukturen introduktion-elevarbete-uppföljning (Brousseau, 1997). Det faktum att eleverna arbetar var för sig, eller i par eller mindre grupper, med en och samma uppgift skapar goda förutsättningar för en givande helklassdiskussion, där eleverna får möjlighet att resonera, argumentera och värdera olika lösningsförslag. Därmed får de möjlighet att tolka och reflektera över vad de gjorde när de undersökte trianglarnas olika egenskaper.

En möjlighet för att få en överblick över vilka matematiska upptäckter eleverna har gjort och ge läraren en bas för hur en uppföljande diskussion kan organiseras är att använda sig av något av de utvärderingsverktyg som presenterades i del 4. Genom att låta eleverna svara på påståenden eller flervalsfrågor om den matematik uppgifterna syftat att synliggöra kan läraren få en uppfattning om vilka erfarenheter eleverna gjort, t.ex. kan eleverna få ta ställning till påståenden likt de nedan och argumentera för sitt ställningstagande.

- Två trianglar med samma omkrets måste ha samma area.
- Alla trianglar har tre hörn.
- Vilka av figurerna på bilden är trianglar?



Figur 2.

Att läraren leder diskussionen skapar inte bara möjlighet att lyfta fram olika uppfattningar utan också att styra de resonemang som kommer upp mot att bli allt mer precisa och exakta, speciellt avseende användning av begrepp och terminologi. Det är möjligt att en del elever har gjort intressanta observationer som de inte lyckas kommunicera tillräckligt bra. Sådana situationer kan bidra till att eleverna utvecklar sin kompetens att använda och förstå matematiska termer och sätt att resonera som är särskilt viktiga i just matematiken.

Ett exempel: Från skutträkning och talmönster till funktioner

Att upptäcka, undersöka och beskriva mönster är en viktig aspekt av matematik och därmed även i matematikundervisning. Redan små barn intresserar sig för och upptäcker regelbundenheter i såväl tid som rum. De regelbundenheter eller mönster som urskiljs utgör en generalisering av innebörder som barnet använder för att upptäcka något specifikt, en egenskap, som kan kännas igen i andra sammanhang. För att kunna tala om, men också matematiskt uttrycka, mönster måste mönstret urskiljas och de egenskaper som utgör dess karaktär benämnas. I mötet med matematiska mönster urskiljs och beskrivs dessa inledningsvis med hjälp av vardagsspråk. Allteftersom elevens matematiska kunnande vidgas och fördjupas kan ett och samma mönster beskrivas på ett alltmer matematiskt avancerat sätt.

”Från skutträkning och talmönster till funktioner” är ett exempel på hur ett matematiskt talmönster kan beskrivas på ett alltmer avancerat sätt, men också på hur digitala verktyg kan användas för att bli till instrument för lärande och undervisning i dessa sammanhang. Exemplet tar sin början i yngre elevers upptäckter av matematiska talmönster och avslutas med laborationer kring olika matematiska aspekter av samma talmönster. Det kan ses som en illustration av en progression som tar sin början i årskurs 1 och som eventuellt sträcker sig genom hela grundskolan till årskurs 9. Tanken är att man som lärare, någonstans i exemplet, kommer att finna en eller flera delar som lämpar sig för de elever man för tillfället undervisar. Alternativt skulle exemplet kunna illustrera ett fördjupningsarbete som elever med särskilt intresse för matematik kan ägnar sig åt. Eftersom exemplet visar en progression i arbetet med talmönster kan det på ett sätt ses som en beskrivning av hur elevers tidiga möte med talmönster och digitala verktyg kan spela en roll i deras framtida lärande kring matematiska samband och funktioner. Omvänt kan exemplets inledning ses som en beskrivning av hur elevers tidigare erfarenheter av matematiska talmönster kan utgöra

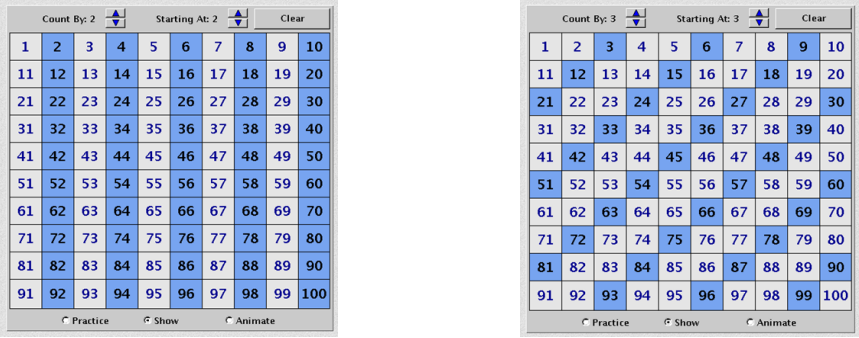
utgångspunkt för mer avancerade undersökningar av samma matematiska talmönster. För lärarens del handlar det om att uppmärksamma och, i orkestreringen av enskilda undervisningstillfällen, ta hänsyn till progressionen i elevernas matematiska och tekniska kunnande. Det innebär att lärare behöver ha en övergripande idé om orkestrering av hela kunskapsområdet och inte enbart fokusera på orkestrering av enstaka undervisningssekvenser. Ytterligare ett sätt att tänka kring exemplet är att se det som en progression i lärares egen utveckling mot att använda digitala verktyg som instrument för sin undervisning på ett alltmer avancerat sätt.

I exemplet ”Från skuträkning och talmönster till funktioner” förekommer några olika applikationer. En dynamisk så kallad 100-ruta som är hämtad från webbplatsen *National Library of Virtual Manipulatives* (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_337_g_1_t_1.html?from=category_g_1_t_1.html) används. Likaså används den dynamiska applikationen Geogebra, vilken nämnts tidigare i modulen. Dock rör det sig inte om applets (en begränsad version av Geogebra avsedd för en specifik uppgift) som tidigare, utan det är hela applikationen med alla dess funktioner tillgängliga som är aktuell. I filmen ”Instruktionsfilm Geogebra” visas hur de olika momenten behandlas i Geogebra.

Dynamisk 100-ruta

Så snart elever behärskar talraden (vilken i sig utgör ett grundläggande matematiskt talmönster då addition med 1 ger nästkommande tal i talraden) introduceras de i ofta olika slags så kallad skuträkning. Det rör sig exempelvis om 2-skutt, det vill säga att kunna räkna 2, 4, 6 och så vidare. Då talmönster 2-skutt markeras i en 100-ruta ger de upphov till olika geometriska mönster beroende på om det rör sig om 2- eller 3-skutt som i fig. 3 nedan eller om andra talmönster. Inledningsvis får eleverna i uppgift att i den dynamiska 100-rutan undersöka vilka geometriska mönster olika talmönster som exempelvis 2-skutt ger upphov till. För att få 2-skutt med start på talet 2 att visas i den dynamiska 100-rutan anges överst i applikationen ”Count by 2” och ”Starting at 2”. Nederst i rutan anges ”Show”.

Eleverna får därefter diskutera vilka likheter och skillnader de kan upptäcka i de geometriska mönstren och i den efterföljande gemensamma diskussionen låter läraren eleverna beskriva sina upptäckter. I samtalet är läraren noga med att fånga tillfällen då elevernas vardagsspråk kan kompletteras med ord av matematisk karaktär som till exempel ”varannan” och ”var tredje”. ”Diagonal” och ”vertikal” är ytterligare exempel på ord som skulle kunna komma i användning.



Figur 3. 2-skutt och 3-skutt representerade i den dynamiska 100-rutan hämtad från National Library of Virtual Manipulatives.

I den dynamiska 100-rutan kan radvisa undersökningar göras i vertikalt och horisontellt led och frågeställningar som ”Vad kan det bero på att inga rutor i kolumnen längst till vänster är blå när vi gör 2-skutt men när vi gör 3-skutt blir vissa rutor i raden blå?” eller ”Vilka rutor är blå när vi gör både 2- och 3-skutt?” och så vidare. Möjligheterna till frågeställningar är stora och med hjälp av den dynamiska 100-rutan kan olika slags skutt snabbt representeras som geometriska mönster.

Det går att se att talen i de färgade rutorna vid 2-skutt utgör produkter i 2:ans multiplikationstabell och att det samma gäller för 3-skutten och 3:ans multiplikationstabell. Det betyder alltså att de geometriska mönstren i 100-rutorna kan beskrivas som en slags representation av produkter i multiplikationstabeller.

Talmönster i tabellform och som koordinater

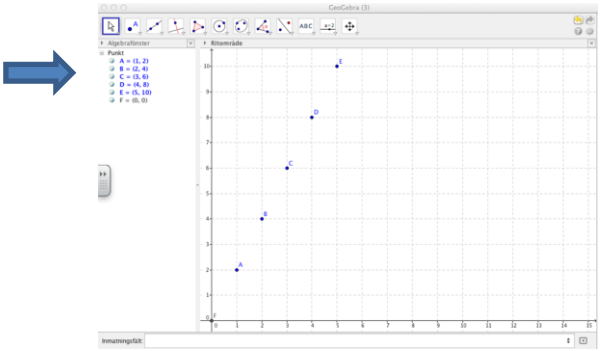
I stället för att representera talmönster som geometriska mönster kan de representeras i tabellform, se nedan. Vänsterkolumnen anger hur många skutt som gjorts och högerkolumnen anger hur långt från 0 man befinner sig. I fig. 4 nedan syns talmönstret 2-skutt representerade på detta sätt. Om eleverna är bekanta med koordinatsystem och hur koordinater i dessa anges, kan man låta antal skutt vara x-koordinat och avstånd från 0 vara y-koordinat. Det betyder avståndet från 0 är en konsekvens av hur många skutt som gjorts. När tabellen är upprättad får eleverna i uppgift att markera punkterna i ett koordinatsystem i Geogebra. Det kräver att eleverna tidigare arbetat med koordinater och koordinatsystem bland annat i Geogebra och innebär således att ett sådant arbete varit en del en del av lärarens övergripande orkestrering av kunskapsområdet.

Antal skutt (x)	Avstånd till 0 (y)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Figur 4. 2-skutt representerade i tabellform för att markeras som koordinater i ett koordinatsystem.

Då punkterna markerats som koordinater i Geogebra får eleverna i uppgift att resonera om hur de olika punkterna förhåller sig till varandra för att uppmärksamma dem på att de ligger längs med en rät linje, vilket innebär att det finns ett samband mellan antal gjorda skutt och avståndet till 0 eller med andra ord mellan x och y. I det så kallade algebrafönstret längst till vänster är punkternas koordinater utskrivna. Se fig. 5 nedan.

I algebrafönstret är punkternas koordinater utskrivna.

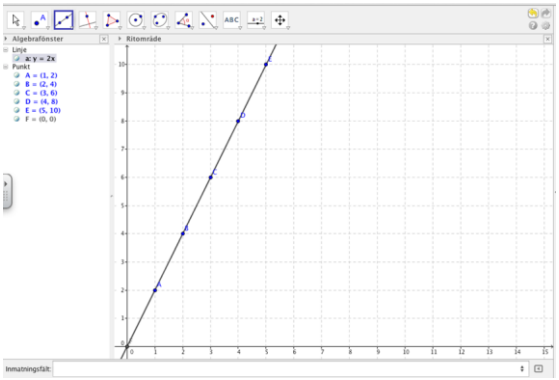


Figur 5. Talmönstret 2-skutt uttryckt som koordinater plottat i Geogebra.

Koordinaterna ligger längs en rät linje

Som nämndes i inledningsstycket är det samma talmönster som används genom hela exemplet, det vill säga det som 2-skutt ger upphov till. Skillnaden ligger i att skutten behandlas och representeras på ett allt mer matematiskt avancerat sätt. Ovan konstaterades att det finns ett samband mellan x och y. Nu är det dags att närmare undersöka detta samband och låta eleverna dra en rät linje genom punkterna. Förutom att linjen syns i det så kallade ritområdet, representeras den också som en ekvation, $y = 2x$, överst i algebrafönstret.

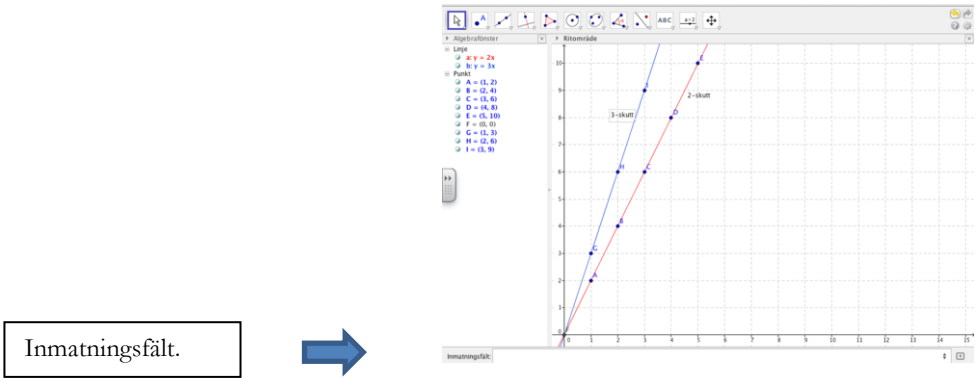
Överst i algebrafönstret representeras linjen som en ekvation.



Figur 6. Linjen genom punkterna representeras som en ekvation längst upp i algebrafönstret.

Läraren ber eleverna att sätta ut punkter godtyckligt längs linjen och att undersöka hur respektive punkts koordinater förhåller sig till varandra för att uppmärksamma eleverna på att oavsett var på linjen en punkt markeras är y-värdet alltid dubbelt så stort som x-värdet. Målet med den uppföljande gemensamma diskussionen är att synliggöra för eleverna att ekvationen $y = 2x$ är en generell representation för samtliga punkter längs linjen, eller med andra ord själva linjen. Då läraren låter eleverna markera motsvarande linje för 3-skutten kan en jämförelse mellan linjerna som 2- respektive 3-skutt ger upphov till göras så att ele-

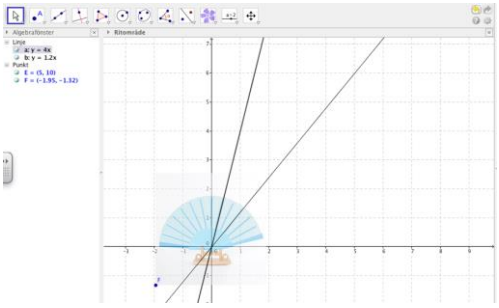
verna blir varse att ”3-skutts”-linjen får en brantare lutning än ”2-skutts”-linjen och att linjens ekvation skrivs som $y = 3x$. Se fig. 7 nedan.



Figur 7. 3-skutt ger upphov till en linje med brantare lutning än vad 2-skutt gör.

Här ges tillfälle att till exempel diskutera vad i linjernas ekvationer som anger hur brant linjen lutar. I en sådan diskussion kan de begrepp som används bli allt mer matematiskt korrekta och generella och exempelvis kan ordet lutning kompletteras med riktningskoefficient. Det är den så kallade riktningskoefficienten k, som avgör linjens lutning. Om $k = 2$ är linjens lutning flackare än om $k = 3$ vilket tydligt syns i fig. 7 ovan.

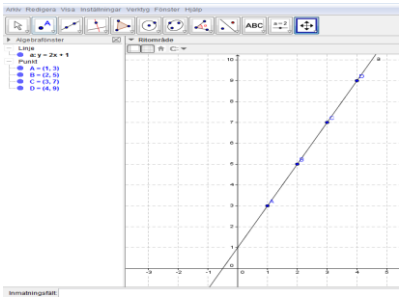
Nästa steg i progressionen kan vara att låta eleverna laborera med linjer som har olika riktningskoefficienter. Genom att i inmatningsfältet nederst i Geogebra (se fig. 7) skriva in olika ekvationer visas de som linjer i ritområdet. Den uppgift eleverna får att arbeta med består i att genom att prova att skriva in olika ekvationer i inmatningsfältet för att få linjer som sammanfaller med solfjäderns. Se fig. 8 nedan. Frågor kan vara ”Vilken betydelse har riktningskoefficienten för linjen?” och ”Hur får man linjer att luta till vänster om y-axeln?” och så vidare.



Figur 8. Eleverna får i uppgift att i inmatningsfältet skriva in ekvationer som ger upphov till linjer som sammanfaller med solfläderns.

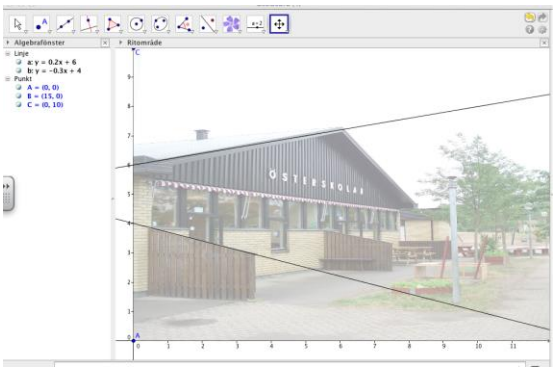
Hittills har 2-skutten undersökts med start från talet 0, men det är fullt möjligt att räkna 2-skutt fast med start på exempelvis talet 1 i stället, alltså att räkna 1, 3, 5, 7 och så vidare. Då anges i den dynamiska 100-rutan ”Count by 2” som tidigare, men istället ”Starting at 3”,

vilket medför att det geometriska mönstret förskjuts ett steg i sidled. Talmönstret kan på samma sätt som tidigare representeras i tabellform och därefter markeras i ett koordinatsystem i Geogebra, varpå en linje genom punkterna kan dras med nedanstående resultat. Se fig. 9.



Figur 9. Då 2-skutt räknas med start på 3 kommer linjen som skutten ger upphov till inte längre att gå genom origo.

Genom att låta eleverna jämföra den nya ”2-skutts”-linjen med den tidigare (se fig. 6) får de möjlighet att upptäcka att linjen inte längre går genom origo och att linjens ekvation nu skrivs som $y = 2x + 1$. Här finns möjlighet att låta eleverna undersöka hur 2-skutt som förskjutits på olika sätt ger upphov till olika linjer och eleverna får möjlighet att dra slutsatser kring hur sambandet mellan linjens förskjutning och konstanttermen i dess ekvation ser ut. Konstanttermen (m) är i ovanstående ekvation 1 och anger var linjen skär y-axeln. Elevernas undersökande arbete har nu lett fram till den generella ekvationen för en rät linje, det vill säga $y = kx+m$, där (k) anger linjens lutning eller riktningskoefficient och (m) anger var linjen skär y-axeln eller dess konstantterm. För att eleverna ska få möjlighet att laborera med räta linjens ekvation får de i uppgift att på skolgården fotografera ett motiv som innehåller flera räta linjer varpå bilden läggs in i Geogebra. Uppgiften eleverna får består i att i inmatningsfältet skriva in ekvationer som ger upphov till linjer som följer de i bilden så väl som möjligt, se fig. 10 nedan.



Figur 10. En bild infogad i Geogebra kan användas som utgångspunkt för laborationer kring räta linjens funktion.

Exemplet ”Från skutträkning och talmönster till funktioner” visar hur samma matematiska fenomen, i detta fall 2-skutt, kan behandlas och representeras på ett alltmer avancerat och generellt sätt. Exemplet visar också hur progression i det tekniska kunnandet kan leda till att ett verktyg, Geogebra i detta fall, blir till ett alltmer komplext instrument för lärande och undervisning.

Referenser

Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2009). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet. Grundskolan våren 2009*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.
Tillgänglig från http://ncm.gu.se/forskningsrapporter

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. I J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 5mat.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*: Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklaering (competencies and mathematical learning)*: Uddannelsestyrelsens temahaefteserie nr. 18-2002, Undervisningsministeriet.

Skolverket (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11*. Stockholm: Skolverket.
Tillgänglig från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575

Skolverket (2011b). *Kommentarsmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.