

Modul: Sannolikhet och statistik  
Del 6. Kommunikation och undersökande arbetssätt i statistik

## Kommunikation i statistikklassrummet

Ulrika Ryan och Anna Wernberg, Malmö Högskola

### **Att utveckla det matematiska språket**

Språket är ett kraftfullt verktyg vi har för att beskriva verkligheten så som vi uppfattar den. Det är verkligheten runt omkring oss som ger oss de första impulserna att utveckla språket – ett språk som så småningom blir alltmer nyansrikt, abstrakt och precist. Ett rikt språk ger oss inte bara större möjligheter att beskriva omvärlden, det hjälper oss också att se nya företeelser och mönster. Vårt vardagsspråk är viktigt för att föra matematiska resonemang men de matematiska begrepp vi använder måste ha en klar och tydlig innebörd. Undervisningen ska leda till att eleverna utvecklar förmågan att kommunicera matematik med matematikens uttrycksformer. Kommentarmaterialet till Lgr 11 anger att detta innebär att eleverna både ska kunna kommunicera *med* såväl som *om* (i vårt fall statistiska) uttrycksformer. Kommunicera inom statistik innebär att i ett sammanhang kunna utbyta statistisk information med andra genom att använda olika uttrycksformer. Det talade språket utgör en av dessa uttrycksformer. Att kunna kommunicera matematik är inte bara nödvändigt för att förmedla sina tankar till andra. Själva kommunikationen fördjupar och breddar den egna förståelsen.

Inom statistikens språkliga domän används ämnesspecifika ord som till exempel median och medelvärde, men vi hittar också ord som är homonymer, alltså ord som har olika betydelse beroende på i vilket sammanhang de används. Kanske har elever stött på ordet frekvens då det rör sig om att hitta rätt våglängd för den radiokanal de vill lyssna på, eller i samband med att pulsen mäts då ordet hjärtfrekvens används för att beskriva hur snabbt hjärtat slår. Inom statistik beskriver ordet frekvens antalet observationer i en viss klass av observationer.

För att effektivt kunna samtala kring olika företeelser ur matematisk synvinkel krävs ett precist språk där tydligt definierade termer används. För att illustrera detta i ett statistiksammanhang kan en jämförelse göras mellan betydelsen av vardagsuttrycket ”det finns flest av” och den specifika termen *typvärde* som vid en första anblick kan antas ha samma innebörd. Betrakta stapeldiagrammet nedan (bild 1).

Det ligger nära till hands att påstå att det finns flest röda legobitar eftersom stapeln för röda legobitar är högst och i ett vardagligt sammanhang är detta ett korrekt påstående. Ur matematisk synvinkel är påståendet ”det finns flest röda legobitar” inte helt korrekt eftersom de flesta legobitarna har en annan färg än röd. Vi skulle däremot kunna säga att ”det finns fler röda legobitar än det finns legobitar av någon annan enskild färg”. Detta uttryck är korrekt men något klumpigt. Eftersom vi inom statistiken behöver prata om situationer som denna ganska ofta så finns en specifik term för det. Vi säger att *typvärdet är röd* och det ligger i termens definition att det finns flest röda legobitar i jämförelse med varje annan enskild färg

eller med andra ord att röd är det vanligaste förekommande värdet. Om undervisningen har som mål att utveckla elevernas språkliga precision krävs att de matematiska frågor som

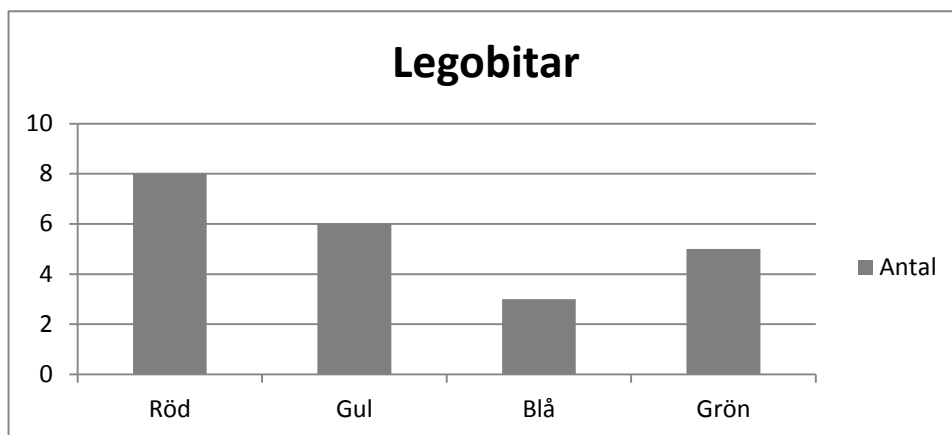


Bild 1. Finns det flest röda legobitar? Vid en första anblick av stapeldiagrammet vill man kanske påstå det, men faktum är att de flesta legobitarna har en annan färg än röd. Typvärdet däremot, är röd.

behandlas med eleverna uppnår sådan precision. Frågan *Vilken färg finns det flest av?* leder till typvärdet – här röd. Frågan *Vilket finns det flest av – röda, eller alla andra färger?* leder till tankar som utgår från datamaterialet som en helhet. Det finns ett samspel mellan den språkliga och den matematiska svårighetsgraden. Språk och kommunikation är aktiva delar i detta samspel och det vardagliga samtalet utgör grunden. Eleverna behöver uppleva att deras eget språk duger men att de gemensamt och tillsammans med läraren kan lära sig nya ord och begrepp. Det handlar dock inte enbart om att lägga till nya begrepp utan i lika stor mån ge de begrepp eleverna redan har ett djupare innehåll. Genom att låta elever kommunicera om ett datamaterial ges de möjlighet att ”förhandla” begrepps mening och tillsammans fördjupa och klargöra innebörden i begreppet. Under förhandlandet anpassar eleverna språk och innehåll genom att indikera förståelse eller brist på förståelse till varandra.

### Grupparbete i statistik

För att utveckla förmågan att kommunicera måste elever ges möjlighet att samtala om och med statistiska uttrycksformer i små grupper. I en studie av Kalaian och Kasim (2014) beskrivs och värderas tre olika typer av samarbetssituationer som använts i statistikundervisning. *Samverkan i lärsituationer* karaktäriseras av en strukturerad, systematisk och lärarstyrd smågruppsundervisning där eleverna arbetar tillsammans för att dels nå sina egna lärandemål men också för att stötta varandra i lärandet. *Samarbete i lärsituationer* är till skillnad från samverkan i lärsituationer en form av mer ostrukturerat smågruppsarbete där eleverna själva förhandlar om problemställning och tillvägagångssätt och där de arbetar tillsammans mot ett gemensamt mål. I en *undersökande lärsituation* (undersökande arbetsätt) arbetar eleverna i grupper mycket under eget ansvar för att lösa ett öppet problem genom att till exempel ställa relevanta frågor och söka svar på dem för att därefter delge resten av klassen sina erfarenheter och slutsatser. Studien antyder att de två förstnämnda lärsituationerna ger bäst

resultat då det gäller lärande i statistik i grupp. Det man ser är att lärande i grupp vinner på tydlig struktur och att läraren är aktiv under elevernas arbete. Kalaian och Kasim synliggör även att det finns anledning att närmare undersöka hur lärare kan ge ytterligare skärpa åt samarbetslärande i statistik.

För att utveckla elevers förmåga att kommunicera i, om och med statistik (eller för den delen inom vilket matematikområde som helst) gäller det att etablera sociomatematiska normer och didaktiska kontrakt som uppmuntrar och tillåter samtal och interaktion där matematik och språk utvecklas och där både lärare och elever ”pratar matematik”. Matematikdidaktikern Huffered-Ackles (2004) med kollegor beskriver fyra nyckelkomponenter i en undervisningspraktik som präglas av samtal om och med matematik. Dessa nyckelkomponenter är *frågor, förklaringar, matematiska idéer* och *ansvar för lärandet*.

### Frågor

När elever svarar på frågor får läraren möjlighet att erfara hur de resonerar om och med olika matematiska begrepp, samtidigt som eleven utmanas i sitt tänkande då svar på frågan ska formuleras. Därför spelar frågeställande en viktig roll i matematikklassrummet. Traditionellt sett ställer läraren frågor kring matematikproblem. Eleverna besvarar frågorna och läraren avgör huruvida svaret är korrekt eller ej. För att elever ska ”prata matematik” med varandra behöver de ges tillfälle att formulera och ställa egna frågor såväl som att besvara och argumentera för sina svar på andras frågor. Huffered-Ackles beskriver hur en sådan undervisning kan introduceras stegvis. Till en början nöjer sig läraren inte med ett svar utan ställer klagörande frågor som till exempel ”Varför?” och ”Hur?” för att eleven ska förtydliga och fördjupa sin förklaring. I nästa steg bjuds eleverna in att vara frågeställare. Då elever inte är överens om ett påstående kan läraren exempelvis fånga ett sådant tillfälle och uppmana eleverna att ställa frågor direkt till varandra istället för genom läraren. Slutsteget syftar till att få eleverna att mer eller mindre själva föra det matematiska samtalet i klassrummet. Det är de som initierar frågorna och som försöker följa, utmana och klagöra varandras resonemang. Läraren har dragit sig tillbaka för att markera att det är eleverna som ”äger” samtalet samtidigt som läraren har en viktig roll i att ställa frågor då det behövs för att föra samtalet framåt. Syftet med frågeställandet är flyttat från att hitta rätt svar till att i stället handla om att synliggöra argumenten och det matematiska resonemanget bakom svaret på frågan.

### Förklaringar

Den andra nyckelkomponenten är nära kopplad till den första eftersom den gäller de förklaringar eller svar som eleverna ger. För att eleverna ska känna sig trygga i att utveckla sina förklaringar och prova dem mot klasskamraternas krävs ett tillåtande klassrumsklimat så att alla elever törs uttrycka sig. Den som ställer frågor, så väl som den som besvarar dem, måste lämna fixeringen vid rätta svar och i stället lägga fokus på *hur* matematiska tankar förklaras. I stället för att bedöma korrektheten i svaret ”undersöker” läraren elevernas förklaringar till exempel med hjälp av klagörande frågor. I nästa steg assisterar läraren eleverna då de ger sin förklaring. Detta kan till exempel ske genom att fråga klassen om vi har all

information som behövs för att förstå de olika tankeleden i en förklaring. Det kan också innebära att eleven får tillräckligt med tid för att i tanken formulera sina argument innan de uttalas eller att vara tydlig med att elevens vardagsord duger. Dessa strategier bidrar till att öka elevers känsla av trygghet och tilltro till sin förmåga. I det sista steget är eleverna trygga i sin förmåga att uttrycka matematiska förklaringar och behöver ingen stöttning av läraren. Om det didaktiska kontraktet istället präglas av att läraren ställer frågor som besvarats med något enstaka ord med efterföljande bekräftelse kan det kännas ovanligt för eleverna att behöva förklara sina tankar eller stå till svars för sitt påstående. Det gäller då att som lärare gå varsamt fram men samtidigt vara medveten om att en omförhandling av kontraktet behöver göras.

### **Matematiska idéer**

En typ av matematikundervisning karakteriseras av att läraren eller läroboken är källa till de matematiska idéer som förs fram i klassrummet. Läraren berättar och skriver på tavlan. Eleverna försöker imitera de procedurer som läraren visat när de själva ska lösa matematikuppgifter. När läraren ger eleverna individuell hjälp består denna ofta i att läraren lotsar eleven mot svaret genom en lösningsprocedur. Denna undervisningspraktik ger elever mycket begränsad möjlighet att utveckla såväl den begreppsmässiga som den kommunikativa förmågan. Det första steget mot att kommunicera matematiska idéer i klassrummet är att få tag på elevernas idéer med hjälp av frågor och förklaringar (se ovan). Eleverna börjar då tänka, förstå och använda matematik i stället för att bara imitera den. Undervisningen går från att vara procedurinriktad till att vara meningsskapande för eleverna. I nästa steg ges eleverna möjlighet att undersöka ett matematikinnehåll. Läraren ställer öppna frågor och söker alternativa lösningar och förklaringar trots att ett förslag redan getts. Läraren intar rollen som medundersökande genom att till exempel be eleverna förklara sina lösningar mer än en gång för att försäkra sig om att hon eller han förstått. Då läraren ikläder sig rollen som medundersökande ges eleverna en bild av vad det kan innebära att delta i ett matematiskt samtal. Denna bild kan eleverna dra nytta av då de själva ska ”prata matematik”. Det andra steget innebär också att läraren använder felaktigheter i eller konflikter mellan elevlösningar som en resurs i elevernas meningsförhandling. I det sista steget har eleverna skaffat sig tilltro till att deras egna matematiska idéer är hållbara och viktiga och läraren är övertygad om att de matematiska idéer eleverna bidrar med är viktiga att undersöka.

### **Ansvar för lärandet**

Som ett resultat av en undervisningspraktik som präglas av samtal om och med matematik följer ett ökat elevengagemang och därmed även ett ökat ansvarstagande för det egna och kamraternas lärande. Istället för att vara passiva lyssnare är eleverna aktiva lyssnare och talare. De blir varandras medlärare och medlärande, och de förväntar sig att bli lyssnade på, att föra fram matematiska idéer och att få förklara sina lösningar.

### ***Olika sätt att kommunicera om ett datamaterial***

Huffered-Ackles modell tillhandahåller en övergripande struktur över nyckelkomponenter som präglar en undervisningspraktik i matematik som bygger på samtal och kommunikation.

ion. Men, modellen säger inget om hur lärare kan urskilja och värdera kvaliteter i det matematiska innehållet som uttrycks på detta sätt. Att just kunna urskilja och värdera det matematiska innehållet är avgörande för att lärare ska kunna ge formativt stöd till elever att utveckla sina sätt att kommunicera matematik samt utveckla sin förståelse i matematik. Konold har tillsammans med sina kollegor utvecklat ett ramverk med fyra kategorier som beskriver hur yngre elever betraktar och pratar om ett datamaterial. Vi introducerar ramverket genom att återknyta till diagrammet över legobitar.

Vi återgår till diagrammet över legobitar (bild 1) och resonemanget ovan kring typvärde kontra uttrycket ”det finns flest av” för att illustrera kärnan i Konolds ramverk. Då påståendet *det finns flest röda legobitar* används riktas uppmärksamheten mot varje färg för sig och jämförelsen görs dem emellan. Om man istället hävdar att det inte alls finns flest röda legobitar riktas uppmärksamheten mot datamaterialet som helhet och det konstateras att de flesta bitarna har en annan färg än röd. Hur elever varierar mellan att fokusera avgränsade delar av ett datamaterial eller att betrakta datamaterialets övergripande form och egenskaper är kärnan i Konolds ramverk.

Ramverket består av fyra kategorier som beskriver vad yngre elever lägger märke till och berättar om utifrån ett datamaterial de varit delaktiga i att samla in och uttryckt med diagram.

- *Markör* för en händelse som de varit delaktiga i.
- *Enskilda värden* som ger information om ett enskilt fall.
- *Kategori* som ger information om vad som undersökts men också om kategoriernas frekvenser.
- *Som en helhet* där datamaterialet t ex ger information om olika kategoriers frekvenser i förhållande till hela materialet.

I scenariot nedan har sex elever fått svara på frågan om vilken som är deras favoritfärg. Bild 2 visar resultatet av denna undersökning. Deras sätt att samtala kring det insamlade datamaterialet illustrerar Konolds fyra kategorier.

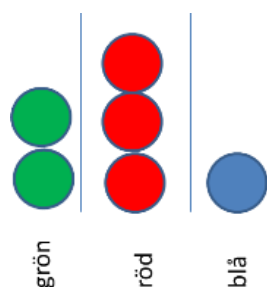


Bild 2. Sex elever har tagit reda på var och ens favoritfärg.

Eleverna diskuterar diagrammet och Linus i gruppen utbrister: *Det var när vi så våra favoritfärger!* Linus ger uttryck för uppfattningen att datamaterialet utgör *markör* för en händelse som

tilldragit sig tidigare, nämligen tillfället då eleverna samlade in materialet, eller helt enkelt talade om vilken som var deras favoritfärg. Sara påminner sig om att Nours favoritfärg är grön genom att säga: *Nour gillar grön bäst. Där är hennes prick.* Sara visar här att hon riktar sin uppmärksamhet mot ett *enskilt värde*, nämligen Nours. Victor däremot, säger att: *Röd vann!* Han uppmärksammar kategorin röd och den absoluta frekvensen hos densamma. Det är tydligt, menar forskarna, att yngre elever ofta samtalar kring data i termer av vinnare och förlorare. I scenariot ovan skulle då färgen röd vara vinnare och blå förlorare. Victor riktar sin uppmärksamhet mot frekvensen hos de olika kategorierna. Leila säger: *Titta hälften av oss gillar röd bäst!* För att kunna göra detta uttalande måste Leila se datamaterialet som en *helhet* och jämföra de absoluta frekvenserna hos kategorin röd med resten av datamaterialet. Leilas sätt att uttrycka sig representerar en aspekt av vad det innebär att uppfatta ett datamaterial som en helhet. Hennes uttalande behandlar *andelen* barn med favoritfärgen röd relaterat till *samtliga* barn. Uttrycket hälften av är alltså i det här fallet kopplat till relativ frekvens.

Då vi använder cirkeldiagram är det den relativa frekvensen som synliggörs. Elever behöver alltså kunna kommunicera genom att använda alla de fyra kategorierna som Konold beskriver för att uttrycka sig kring ett cirkeldiagram.








Syn på datamaterialet	Fokuserad del av datamaterialet	Datamaterialets struktur	Uttalande
Markör	?		<i>Ja, det var när vi så våra favoritfärger!</i>
Enskilda värden			<i><u>Nour gillar grön bäst.</u> Där är hennes prick.</i>
Kategori			<i>Röd vann!</i>
Data som en helhet			<i>Titta hälften av oss gillar röd bäst!</i>

Bild 3. Olika sätt att resonera kring ett datamaterial (Konold m.fl., 2014).

Studien visar att yngre elever sällan självmant riktar sin uppmärksamhet mot data som en helhet vilket betyder att de behöver stöttning för att kommunicera kring ett datamaterial på ett sådant sätt. Man skulle nu kanske kunna tro att det är förmågan att resonera om data *som helhet* som undervisningen borde fokusera och att de andra synsätten är mindre viktiga. Som vi har påpekat i Del 5 är det dock snarare så att alla olika perspektiv på ett datamaterial

samspekar och är betydelsefulla. För att eleverna ska uppleva en verklig koppling mellan t.ex. ett diagram och det datamaterial diagrammet representerar är det viktigt att de relaterar diagrammet till tillfället då informationen samlades in, dvs. att de ser datamaterialet som en markör. Annars finns risken att diagrammet bara blir linjer på ett papper istället för en representation av en del av verkligheten som undersökts. Elever behöver också kunna identifiera och samtala om olika variablers frekvenser eftersom det är ett led i att se på datamaterialet som en helhet.

Ibland uppstår konflikter mellan elevers olika sätt att samtala kring ett datamaterial. Nedan beskrivs ett exempel, från studien av Konold och hans kollegor, som återger en konflikt mellan att ge uttryck för data som enskilda värden och som kategori. I en klass hade eleverna fått svara på frågan om de uppskattade att arbeta med datorer eller inte.



Bild 4. Eleverna i en klass har fått svara på i vilken mån de uppskattar att arbeta med datorn.

Klädnypor fästes på olika platser på en bit kartong för att representera elevernas åsikter i frågan. I ett uppföljande samtal i klassen uppstod nedanstående ordväxling som kan ses som ett exempel på en konflikt mellan att fokusera på ett enskilt värde i datamaterialet och att fokusera på kategorier i materialet.

Läraren: *Tror ni att någon annan kan säga något om oss utifrån vår undersökning?*

Rhea: *Ja, de vet att de flesta av oss gillar datorer jättemycket.*

Amanda: *Inte jag. Jag sa nej.*

Melinda: *Inte jag beller. Jag sa att jag aldrig spelat dator.*

Rhea: *Ja sa de flesta av oss!* (Konold m fl. 2014, vår översättning)

Om lärares undervisningspraktik utgår från att lyssna till eleverna, lyfta fram deras frågor och tillsammans med eleverna formulera statistiska idéer så som Kimberly Huffered-Ackles modell beskriver kan ovanstående konflikt utgöra fint tillfälle att ”prata matematik”. Eleverna ställer här inga direkta frågor till varandra men läraren kan hjälpa dem med det, till exempel genom att be Amanda och Melinda att fråga Rhea varför hon säger att de flesta i klassen gillar datorer och genom att be Rhea förklara sin ståndpunkt. Läraren kan bli medlärande och undersöka flickornas förklaringar med hjälp av klargörande frågor. På så sätt stöttas eleverna i att sända budskap till varandra om förståelse eller brist på förståelse vilket är grunden för det gemensamma meningsskapandet. Läraren är delaktig i elevernas process kring meningsskapandet. Konolds ramverk beskriver olika möjliga sätt att resonera och gör det enklare för läraren att uppfatta och utmana olika typer av resonemang från olika elever. Då blir det också enklare att stötta eleverna på en innehållslig nivå. Som exemplet visar tillåter den genomförda undersökningen resonemang om både ett enskilt barns synpunkt men även hur många elever som fört fram respektive synpunkt. Materialet representerar alltså både ett *enskilt värde* och en *kategori*.

### Sammanfattning

Vi har i denna text bland annat diskuterat vikten av att elever får möjlighet att arbeta tillsammans för att utveckla sitt matematiska språk och sin förmåga att kommunicera matematik. Men, bara för att elever sitter tillsammans och pratar i grupp uppstår inte samtal som blir gynnsamma för lärande och kommunikation i matematik per automatik. För att skapa effektiv och produktiv undervisning, som bygger på samtal mellan elever, behöver lärare strukturera undervisningen på ett medvetet sätt. Vi har i den här texten lyft fram två modeller för att ge stöd till lärare i det arbetet. Kimberly Huffered-Ackles modell erbjuder en övergripande ram över nyckelkomponenter för en undervisningspraktik som präglas av samtal om och med matematik. Inom den ramen kommer ni att få träna på att använda Konolds ramverk för att urskilja, värdera och utveckla innehållet i elever sätt att fokusera och samtala om ett datamaterial som de varit delaktiga i att samla in och presenterat i ett diagram.

### Referenser

- Huffered-Ackles, K. et al. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35, 81–116.
- Kalaian, S. & Kasim, R. (2014). A meta-analytic review of studies of the effectiveness of small-group learning methods on statistics achievement. *Journal of Statistics Education*, 22 (1). Hämtad från [www.amstat.org/publications/jse/v22n1/kalaian.pdf](http://www.amstat.org/publications/jse/v22n1/kalaian.pdf)
- Konold, C., Higgins, T., Russell, S. J. & Khalil, K. (2014). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics*. doi:10.1007/s10649-013-9529-8