CHRISTINA SVENSSON UNDERVISNINGSUTVECKLANDE PROFESSIONSUTBILDNING FÖR BLIVANDE OCH VERKSAMMA MATEMATIKLÄRARE

En studie med utgångspunkt i ett variationsteoretiskt perspektiv

**UNDERVISNINGSUTVECKLANDE PROFESSIONSUTBILDNING
FÖR BLIVANDE OCH VERKSAMMA MATEMATIKLÄRARE**

Malmö Studies in Educational Sciences No. 96

Copyright Christina Svensson 2022

Omslagsbild framsida Laholmsbukten foto av Katja Rasic, baksida bild målad av Ove Andersson

ISBN 978-91-7877-245-2 (tryckt)

ISBN 978-91-7877-246-9 (pdf)

ISSN 1651-4513

DOI 10.24834/isbn.9789178772469

Tryck: Media-Tryck, Lunds universitet, 2022

Media-Tryck is a Nordic Swan Ecolabel
certified provider of printed material.
Read more about our environmental
work at www.mediatryck.lu.se

MADE IN SWEDEN

CHRISTINA SVENSSON
UNDERVISNINGsutvecklande
PROFESSIONSutbildning för
BLIVANDE OCH VERKSAMMA
MATEMATIKLÄRARE

En studie med utgångspunkt
i ett variationsteoretiskt perspektiv

Malmö universitet, 2022
Fakulteten för Lärande och samhälle

Publikationen finns även elektroniskt,
se mau.diva-portal.org

Till min familj

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

FÖRORD	11
LISTA ÖVER ARTIKLAR.....	13
1 INLEDNING.....	15
1.1 Avhandlingens syfte och frågeställning.....	19
1.2 Avhandlingens kontext	20
1.3 Avhandlingens disposition.....	20
2 KOLLABORATIV FORSKNING OCH UNDERVISNINGS- UTVECKLANDE PROFESSIONSUTBILDNING	23
2.1 Fortbildning för verksamma lärare	24
2.2 Kollaborativ klassrumsforskning.....	26
2.3 Kollaborativ professionsutveckling	28
2.4 Professionsutbildning för matematiklärare	30
3 MATEMATIKUNDERVISNING I FÖRSKOLA OCH GRUNDSKOLA	35
3.1 Matematikkunnande	35
3.2 Matematik i förskolan	38
3.2 Matematik i grundskolans årskurs 4-6	41
3.3 Matematiskt innehåll i studierna	43
4 TEORETISK INRAMNING	53
4.1 Variationsteoretiska utgångspunkter	53

5 METODOLOGI.....	59
5.1 Forskningsdesign	59
5.2 Syntes.....	60
5.3 Forskningsdesign i studierna.....	62
5.4 Insamling av data i studierna.....	65
5.5 Analysarbete i studierna	68
5.6 Trovärdighet och generaliserbarhet	70
5.7 Forskningsetiska överväganden.....	72
5.8 Forskarens roll.....	74
6 RESULTAT	75
6.1 Studie 1	75
6.2 Studie 2	78
6.3 Studie 3	81
6.4 Studie 4	83
6.5 Syntes av studiernas resultat	84
7 DISKUSSION.....	89
7.1 Resultatdiskussion.....	89
7.2 Konklusion	95
7.3 Metoddiskussion.....	96
7.4 Begränsningar	97
7.5 Kunskapsbidrag och implikationer för undervisning.....	98
7.6 Framtida forskning.....	99
SAMMANFATTNING	101
Inledning	101
Avhandlingens syfte och frågeställning.....	102
Teoretisk inramning	102
Metodologi	103
Resultat.....	105
Slutsats och diskussion	107

SUMMARY	109
Introduction.....	109
Aim and research question.....	110
Theoretical framework.....	111
Methodology	111
Result	114
Conclusion and discussion.....	116
REFERENSER	119
BILAGA 1.....	137
BILAGA 2.....	139
BILAGA 3.....	140
BILAGA 4.....	142
BILAGA 5.....	144

FÖRORD

Vilken resa

Min långa doktorandresa närmar sig sitt slut. Jag började som doktorand 2012 vilket resulterade i en licentiatuppsats 2016. Mina tankar på att fortsätta som doktorand var tämligen avlägsna vid denna tidpunkt. Det dröjde dock inte länge förrän jag erbjöds att fortsätta utifrån mitt nyvunna forskningsintresse inom professionsutvecklande matematikundervisning. September 2017 steg jag på eller snarare fortsatte jag min doktorandresa. Under den här långa tiden har jag haft förmånen att få träffa många personer som på olika sätt har gjort min resa möjlig. Först av allt vill jag tacka Malmö universitet, Lärande och samhälle, forskarskolan och NMS. Institutionen NMS som jag tillhört under hela min doktorandresa. Jag riktar ett stort tack till er alla vid NMS, dels för att jag erbjöds vara doktorand vid institutionen, dels för att jag erbjöds arbeta som lärarutbildare tillsammans med er. Jag vill även rikta ett stort tack till Catarina Christiansson för all din ovärderliga hjälp under min resa som doktorand.

En doktorand måste, som alla vet, få ingå i nätverk som främjar möjligheterna att utvecklas och stödjas i sitt doktorandarbete. Jag har haft den stora förmånen att få delta i handledningsgruppen som varje månad har träffats i D 477. Ett stort tack till er alla som befunnit er i detta rum (även om det blev via zoom i slutet), för all uppmuntran och utmaningar ni har tillfört i mitt avhandlingsarbete. I samma rum har även forskargruppen PeVals utmanat och uppmuntrat mig i mitt arbete. Ett stort tack till er alla i PeVals. I ett avhandlingsarbete ingår dessutom några viktiga stopp som ska beaktas. Tack Hanna Palmér, professor i matematikens didaktik vid Linné universitet, för dina betydelsefulla insikter under mitt planeringsseminarium. Tack Per Nilsson professor i matematikens didaktik vid Örebro

universitet, för din gedigna läsning av mitt manus (vid två tillfällen) och givande diskussion under mitt slutseminarium. Tack Jesper Sjöström, professor i didaktik vid Malmö universitet och Lisa Björklund Boistrup, professor i matematikens didaktik vid Malmö universitet, för er genomläsning av min kappa inför min slutdestination.

En resa och i synnerhet en doktorandresa innebär fler delar än enbart själva avhandlingsarbetet. Jag har haft förmånen att vara omgiven av några personer som har fyllt på med energi vid varje depåstopp. Ett stort tack till Cecilia Segerby, Elisabeth Pettersson, Richard Wester och Åsa Roosqvist, för all er omsorg under min doktorandresa. Balli Lelinge, tack för alla promenader. Dessa promenader som har inneburit, genom din envishet och support, att jag orkat lite till. Att ha er runt omkring mig, som trott på mig, har varit avgörande för att jag idag skriver detta förord i min avhandling. En person som har trott på mig och som hela tiden har funnits vid min sida, aldrig svikit eller tvekat vid något tillfälle, är min superhandledare Mona Holmqvist professor i utbildningsvetenskap vid Malmö universitet (och så mycket mer). Var hade min doktorandresa slutat, om du inte accepterat min förfrågan om att bli min huvudhandledare. Du är inte bara unik inom forskning, du är även unik i att handleda och som person. En handledning som inte enbart riktar fokus på att handleda mitt avhandlingsarbete utan även att handleda mig in i forskarvärlden med en fasthet och en styrka som är ovärderlig. Det är första gången som det är svårt att skriva till dig Mona. Jag har bävat samtidigt som jag har sett fram emot detta tillfälle. För genom att jag skriver detta innebär det samtidigt att jag inte ingår i den unika skaran av att vara doktorand hos dig. Ett varmt och stort tack till min superhandledare Mona Holmqvist.

Slutligen är det återigen dags att rikta ett hjärtligt tack till min fantastiska familj för ytterligare en avslutad doktorandresa. Vad hade jag gjort utan er. Tack vare er har jag tvingats ut ur min doktorandbubbla för att vara närvarande i vardagen som, trots en doktorandresa, hela tiden fortgår. Ett stort tack till er alla för att ni finns vid min sida Erik och Katja, Henrik, Andreas, Markus och Selma samt Magnus (mitt allt). Jag älskar er alla, min underbara familj.

Christina Svensson, Malmö, 22-01-22

LISTA ÖVER ARTIKLAR

Denna avhandling är baserad på nedanstående artiklar.

1. Svensson, C. (submitted). Using videos to identify pre-service teachers' ability to recognise children's mathematical activities in preschool.
2. Svensson, C. (reviderad). Discerning preschool teacher's experiences to enhance children's participation in mathematical play activities.
3. Svensson, C., & Holmqvist, M. (2021). Pre-service Teachers' Procedural and Conceptual Understanding of Pupils' Mean Value Knowledge in Grade 6. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 16(3).em0648.
<https://doi.org/10.29333/iejme/11067>
4. Lelinge, B., & Svensson, C. (2020). Teachers' Awareness and Understanding of Students' Content Knowledge of Geometric Shapes. *Problems of Education in the 21st Century*, 78(5), 777-798.

1 INLEDNING

Både under min tid inom lärarutbildningen och som verksam lärare deltog jag i flera insatser som syftade till att förbereda mig för att undervisa barn och elever. Redan då kände jag att dessa insatser inte alltid ledde till en djupare förståelse av hur jag skulle bli en bättre lärare i klassrummet och skapa möjligheter för barn och elevers kunskapsutveckling. De senaste åren har jag arbetat både som lärarutbildare för blivande lärare i lärarutbildningen och som kommunlektor för verksamma lärare. Återigen har jag, fast på andra sidan, ställts inför problematiken att skapa undervisningsutvecklande utbildning för blivande och verksamma lärare. Det tycks vara en utmaning att åstadkomma professionsutveckling för lärare som landar i hur man som lärare ska kunna och fortsätta att kunna utveckla undervisning i förskola och skola, i matematik. I avhandlingen utgår jag från en definition av professionsutveckling som innebär att lärare och förskollärare, som yrkesgrupp, tar del av och utvecklar gemensamma kunskaper och förmågor att bedriva matematikundervisning. Att utforma professionsutveckling för lärare är en problematik som även tidigare forskare har belyst (Desimone, 2009; Insulander m.fl., 2019; Kaufmann & Ryve, 2019). Dagens samhälle ställer högre krav än tidigare på matematisk förståelse och matematiska färdigheter (Regeringskansliet, 2010). För att framtida vuxna ska ha goda kunskaper i matematik krävs att de möter lärare som har god förmåga att undervisa i ämnet. Tidiga insatser gör skillnad i elevers kunskapsutveckling senare i skolan och i vuxenlivet. Att studera på vilket sätt lärares kompetens kan öka genom professionsutvecklande insatser, och hur dessa utformas blir därmed viktigt (Kaufmann & Ryve, 2019; Timperley, 2015). Den här avhandlingen fokuserar därav på professionsutvecklande matematikundervisning i förskola och skola samt inom lärarutbildningen.

Matematikämnetns förstärkta position i förskola och skola, tillsammans med införande av undervisningsbegreppet i den reviderade läroplanen för förskolan (Skolverket, 2010; 2018), indikerar att ämnet har hög status (Biesta, 2011). De tidiga insatserna kan även lägga grund för att på sikt lyfta resultaten för elever i de senare skolåren. Att undervisning i förskolan ska utformas på samma sätt som undervisning i skolan är dock varken möjligt eller önskvärt, eftersom små barns utveckling ställer krav på andra former av läraaktiviteter. Forskning som visar exempel på hur undervisning i förskolan kan förstås och utformas på sina egna villkor har skett de senaste åren (se till exempel Alkhede, 2021; Björklund & Barendregt, 2016; Björklund m.fl., 2018; Helenius, 2018; Ljung-Djärf & Holmqvist Olander, 2013).

Williams och Sheridan (2018) beskriver hur förskolans undervisningsuppdrag och genomförande ofta utgår från lek och matematiska aktiviteter. Matematiska aktiviteter är sådana aktiviteter som uppmärksammar matematiska begrepp och dess innehåll i fria eller organiserade lekbaserade lärsituationer. Det kräver dock att förskolläraren har kunskaper både om ämnet och om vad undervisningens fokus ska riktas mot för att bidra till matematiskt kunnande.

Läroplansmålen är allmänt hållna och öppnar för olika tolkningar av vad specifikt ett innehåll ska innefatta, hur undervisningen ska iscensättas och vad det egentligen innebär att barn lär sig något. (Björklund m.fl., 2018, s.3)

De allmänt hållna läroplansmålen bidrar till att de ämnesdidaktiska val som förskolläraren gör får en avgörande betydelse för hur undervisningsformer utformas som ska bidra till förskolans måluppfyllelse (Alkhede, 2021; Björklund m.fl., 2018). Att kunna göra ämnesdidaktiska val kräver kunskaper om både vad valen i sig genererar till och vilka val som ska genomföras. Björklund m.fl. (2018) menar att förskolläraren både behöver kunskaper som gör att de riktar sitt fokus mot barnens lärande och kunskaper för att identifiera vilket lärande som faktiskt erbjuds i en undervisningssituation. Liknande resonemang förs inom skolans kontext. Insulander m.fl. (2019) menar att läroplansmålen inom svensk skola är allmänt hållna och erbjuder läraren flera tolkningsmöjligheter för hur målen ska nås. Det innebär att lärarens val av både uppgifter och undervisningsdesign snarare

utgörs av vad det kulturella sammanhang som läraren befinner sig i (exempelvis att man gör saker på rutin), än medvetna val för vad i och hur matematikundervisning ska bedrivas (a.a.).

Inom det matematikdidaktiska forskningsfältet, inom skolan, argumenteras för betydelsen av lärarens ämnesspecifika kunskaper, för att kunna erbjuda eleven lärande i matematik (Skott m. fl., 2018). Rowland (2014) presenterar resultat som lyfter fram lågstadielärares matematiska kunskaper som en av flera indikatorer för kvaliteten i matematikundervisningen. Rowland menar att det inte finns en förklaring till hur elevers kunskaper i matematik utvecklas, men studiens resultat styrker argumentet att lärarens ämnesspecifika kunskaper är betydelsefulla för undervisningens kvalitet. Ball m.fl. (2008) lyfter och fördjupar Shulmans (1986) idéer om betydelsen av både ämnesspecifika kunskaper (content knowledge) och ämnesdidaktiska kunskaper (pedagogical content knowledge) för lärare, där det senare ska förstås i relation till ämne, årskurs samt övriga ämneskursplaner men även till elevernas förståelse av innehållet (knowledge of content and students KCS).

What do teachers need to know and be able to do in order to teach effectively? Or, what does effective teaching require in terms of content understanding? This places the emphasis on the use of knowledge in and for teaching rather than on teachers themselves (Ball et al., 2008. s. 394).

Det är därför betydelsefullt att belysa hur lärares ämneskunskaper, såväl som ämnesdidaktiska kunskaper i relation till matematiskt kunnande, kan utvecklas. Det ökade antalet studier som framhäver betydelsen av subject matter knowledge (SMK) (Skott et al, 2018) bidrar till argument för ökat ämnesinnehållsfokus inom lärarutbildningar och fortbildningsinsatser. Ball m.fl. (2008) benämner matematisk kunskap för att undervisa i matematik som MKT (Mathematical knowledge for teaching). Inom ramen för MKT behandlas förhållandet mellan lärarens kunskaper om det matematiska innehållet (vad betyder det att ha kunskaper om medelvärde eller två- och tredimensionella objekt) och de elever de ska undervisa (vad har elever upplevt vara svårt tidigare och hur kan innehållet tillgängliggöras). MKT inbegriper kunskaper om hur matematiska procedurer fungerar, vilka utmaningar elever troligtvis kommer att stöta på och hur läraren bäst definierar matematiska termer och föreställningar för eleverna (Hill m.fl., 2008). Undervisning och lärande om exempelvis medelvärde är en komplex fråga

och bygger på flera grundläggande principer och idéer (MacCullough, 2007). Denna komplexitet avseende undervisning och lärande om olika matematiska innehåll är en viktig aspekt att beakta inom lärarutbildning och fortbildning.

Shulman (1986) menar att utbildning för lärare och blivande lärare kan baseras på dilemman (fallstudier) som dokumenterats i praktiken. Dessa utgör inblickar i autentiska utbildningssammanhang, och lyfts in som valda exempel från praktiken för att erbjuda reflektion av undervisningens utformning och kvalitet avseende barns och elevers lärande. Till skillnad från när lärare reflekterar i realtid över sin egen undervisning, möjliggör fallstudierna distansering och reflektioner i ett retrospektiv tillsammans med andra lärare. Shulman (1986) menar att man inte ska se dessa dilemman som avgörande för att åstadkomma förbättrad undervisning, eftersom undervisning är en komplex situation.

Att enbart utgå från videodokumenterade dilemman, som valts av någon annan, skiljer sig även från lärares egna önskemål om vilken form av fortbildning som de föredrar. I The Teaching and Learning international Survey (TALIS) framträder främst önskemål om möjlighet att använda egendokumenterade problemformuleringar som utgångspunkt i professionsutveckling, tillsammans med möjligheten att få feedback på den egna undervisningen av skolledare, kollegor och andra externa personer (OECD, 2019). Trots det bedrivs det få studier som fokuserar på denna form av professionsutveckling för lärare.

Bristerna på sådana studier grundas inte i att det finns få möjligheter att utforma utbildningsaktiviteter med utgångspunkt i praktikens egenformulerade dokumenterade problemområden. Situationen är snarare den motsatta (Christersson, 2018), eftersom modeller som både belyser lärares professionsutveckling som elevens matematiklärande lyfts fram och studeras i olika delar av världen (Holmqvist, 2017). Till skillnad från lärarutbildare, som försöker förbereda studenterna i det okända genom att lyfta det kända som exempelvis genom olika dilemman från praktiken (jmf med Shulman, 1986), har verksamma en erfarenhetsbas med sig in i professionsutvecklingsinsatser vilket gör att utformningen av utbildningarna kan behöva anpassas till respektive grupp.

När det gäller blivande lärare hävdar Pang och Marton (2005) att det bästa och mest kraftfulla sättet är att försöka utveckla och bidra med verktyg i utbildningen, som studenterna senare kan använda för nya okända

situationer i sina framtida yrken. Ett sådant verktyg, som kan användas både av blivande och verksamma studenter, kan vara teoretiska utgångspunkter som hjälper lärare att förstå sin verksamhet. Björklund m.fl. (2018) lyfter betydelsen att, med stöd av teoretiska verktyg, identifiera vilket lärande och kunnande som lärares ämnesdidaktiska val har erbjudit.

Det är utifrån ett behov av att utveckla kunskap om hur blivande och verksamma lärare kan utveckla sin kompetens att undervisa i matematik i de tidiga åren, som den här avhandlingens problemområde avgränsats, med intentionen att bidra till god matematikundervisning i förskola och skola genom att utveckla kunskap om lärares professionsutbildning. I denna avhandling är det både lärarutbildare och verksamma lärare som kollaborativt utvecklar sin förståelse för matematikundervisning och lärande i sina respektive verksamheter, genom kollaborativa insatser. I avhandlingen ingår fyra studier, och det som är gemensamt för samtliga ingående fyra studier är ett fokus på professionsutveckling för blivande och verksamma lärare som ska undervisa matematik i de yngre åren.

1.1 Avhandlingens syfte och frågeställning

Avhandlingens syfte är att bidra med kunskap om hur kollaborativ undervisningsutvecklande professionsutbildning kan utveckla blivande och verksamma lärares syn på och förståelse för yngre elevers/barns lärande i matematik och undervisningens betydelse för att stödja deras lärande. Kappans övergripande frågeställning är:

Vilka inslag i professionsutveckling för blivande och verksamma lärare i matematik bidrar till att de utvecklar en förändrad syn på och förståelse för elevers kunnande och lärande genom matematikundervisning?

Avhandlingens kunskapsbidrag utgörs av insikter i hur undervisning, kollaborativt planerad och iscensatt av lärarutbildare, i sin tur påverkar blivande och verksamma lärares syn på matematikundervisningens utformning samt barn och elevers matematikkunnande. För att se om det finns likheter och skillnader mellan olika utbildningskontexter har fyra studier valts ut, varav två lärarutbildningskontexter (förskollärary- och grundskolläraryr- utbildning) och två kontexter för verksamma lärare (förskola och grundskola). Dessa beskrivs mer utförligt i respektive studie.

Det teoretiska ramverk som använts som ansats, variationsteorin, bidrar till att lyfta fram det som haft betydelse för lärares förmåga att upptäcka

och synliggöra aspekter som är avgörande för att iscensätta undervisning i relation till elevernas matematikkunnande.

1.2 Avhandlingens kontext

Den här avhandlingen studerar hur olika kontexter av praktikgemenskap (Wenger, 2000) för blivande och verksamma lärare i matematik kan förstås. Kontexterna är förskola och grundskola, och studierna inom respektive kontext riktar mot både blivande och verksamma lärares kompetensutveckling. Anledningen till valet att studera både blivande och verksamma lärares professionsutveckling är att analysen kan synliggöra skillnader och likheter avseende kompetensbehov blivande lärare har i relation till de behov verksamma lärare har. Praktikgemenskaperna som studeras i de fyra olika sociala kontexterna är inom ramen för professionsutveckling;

- Lärarutbildning inom förskolläraryrkesprogrammet matematikkurs (studie 1)
- Verksamma förskollärares kompetensutveckling i matematik (studie 2)
- Lärarutbildningens matematikkurs inom grundläraryrkesprogrammet årskurs 4–6 (studie 3)
- Verksamma lärares kompetensutveckling i matematik årskurs 4–6 (studie 4)

Inom läraryrkesprogrammen är det studenter som ingår, och i respektive skolkontext för verksamma (för- och grundskola) är de ingående deltagarna yrkesverksamma förskollärare som deltagit i en kompetensutvecklingsinsats (Svensson, 2015; 2017) och lärare som deltagit i en praktikinriktad fortbildningsinsats för hela skolan (Lelinge & Alwall, inskickad). Det innebär att i avhandlingen studeras lärares undervisningsutvecklande professionsutbildning i förskola och grundskola årskurs 4–6, både inom lärarutbildningen och verksamheterna.

1.3 Avhandlingens disposition

Denna sammanläggningsavhandling består av en kapp och fyra studiers resultat presenterade i lika många vetenskapliga artiklar, vars resultat syntetiseras i kappan.

Efter detta inledande kapitel följer kapitel 2 som belyser studier inom avhandlingens positionering avseende kollaborativa samarbetsmodeller inom undervisningsutvecklande professionsutbildning. I efterföljande kapitel 3 riktas fokus mot avhandlingens respektive sammanhang avseende matematikkunnande inom matematikundervisning i förskola och skola samt det matematiska innehållet i studierna. De matematiska innehållen utgörs av Bishops (1988) sex matematiska aktiviteter (studie 1 och 2), lägesmättet medelvärde inom statistik (studie 3) och slutligen två- och tredimensionella objekt inom geometri (studie 4). Därefter presenteras i kapitel 4 avhandlingens teoretiska inramning, där variationsteorin utgör analytisk lins. Det efterföljande metodkapitlet, kapitel 5, innehåller avhandlingens metodologiska överväganden, vilket fortsätter med en beskrivning av analysförfarande med stöd av valda analytiska lins. Även de fyra studiernas metodologiska ansatser presenteras, samt etiska diskussioner i relation till de ingående studierna. I kapitel 6 presenteras föreliggande studiers resultat. I kapitel 7 diskuteras slutsatser med utgångspunkt i avhandlingens syfte och frågeställning. Kapitlet avslutas med diskussioner om metodval, teoretiska utgångspunkter, begränsningar, implikationer för praktiken och fortsatt forskning.

2 KOLLABORATIV FORSKNING OCH UNDERVISNINGS- UTVECKLANDE PROFESSIONSUTBILDNING

Det finns ett stort intresse och vilja att förstå hur mänskligt lärande sker och lärande kan inte enbart begränsas till ett metodologiskt eller tekniskt förfarande i skolan. Lärande sker ständigt när individer samspelar i samhället (Säljö, 2011). Inte heller matematikämnet kan avgränsas från samhället i övrigt, matematisk kompetens behövs i olika situationer i samhället och undervisningen behöver förhålla sig till vilken kunskap som är viktigt att utveckla i skolan (Bishop, 1988), och ringa in vilken matematisk kompetens som barn och ungdomar antas behöva för att förberedas för att ingå i samhällets sociala kontext i framtiden (Yackel & Cobb, 1996; Hemmi & Ryve, 2015). Eftersom lärandeutfallet påverkas av den syn på matematik och undervisning som råder i den praktikgemenskap som lärandet sker (Lave, 1993), blir professionsutbildning för blivande och verksamma lärare i matematik viktig. Lärarutbildning för blivande lärare och kompetensutbildning för verksamma lärare är betydelsefull för att ge barn och elever goda förutsättningar att utveckla sin matematiska förståelse. Forskning visar att kollaborativ professionsutbildning är den modell som i högst grad påverkar barns och elevers lärande, förutsatt att den utgår från de frågeställningar som lärare upplever i sin vardag (OECD, 2019). Av den anledningen har de modeller som studierna i denna avhandling bygger på grundats i undervisningsutvecklande kollegial professionsutbildning. Data har genererats genom professionsutbildningsinsatser, vilket innebär att forskningen som sådan placeras in i fältet kollaborativ klassrumsforskning. I

båda fallen, klassrumsforskning och professionsutbildning, har det kollaborativa perspektivet en central plats, vilka tas upp i början av detta kapitel. Kapitlet avslutas med avhandlingens mer riktade fokus avseende professionsutbildning för matematiklärare i respektive sammanhang.

2.1 Fortbildning för verksamma lärare

Begreppen kompetensutvecklings- eller fortbildningsinsatser är vanligt förekommande begrepp avseende utbildning som syftar till att främja skolans eller förskolans personals professionella utveckling av undervisningen i enlighet med gällande styrdokument. Tanken är att arbetet ska utgå från en gemensam kunskapsbas som vilar på en vetenskaplig grund (Florin, 2010). Begreppet vetenskaplig grund innebär att lärares undervisning ska utformas utifrån forskningsresultat. Perssons (2017) studie om vetenskap och beprövad erfarenhet menar att detta inte räcker, utan begreppet vetenskap kräver kunskaper om processer i hur man ska använda kunskap från forskningsresultaten. Det innebär att kritiskt granska och tänka in vetenskap i det sammanhang man själv verkar i. Detta stämmer om man ser läraren som en konsument av forskningsresultat, men genom en kollaborativ process ingår läraren i forskningsprocessen som bidrar till att utveckla hens arbete. I Darling-Hammonds och Richardsons (2009) översiktsartikel framträder att forskning (vetenskap) ger lärare stöd förutsatt att den ger lärare möjlighet till att vara aktiva och pröva olika metoder i undervisningen, ger ny kunskap som kan användas i praktiken, är kollaborativ, intensiv och varar över tid. Persson (2020) påpekar betydelsen av att se vetenskap både som stödjande och störande inom det kollaborativa arbetet. Det innebär också att vetenskap behöver vara en integrerad del av det vardagliga arbetet i förskola och skola (a.a.).

Förutom vetenskap behövs även kollaborativa former där lärare kommunicerar sin undervisning med varandra för att en förändring ska ske (Timperley m.fl., 2007). För att ett kollaborativt lärande ska bidra till professionsutveckling krävs något mer än samarbete. Professionsutvecklande fortbildningsinsatser behöver utgå från egen kunskap baserad på vetenskap (Timperley m.fl., 2007) och egenformulerade frågeställningar (OECD, 2019). Allt professionsutvecklande arbete bör dessutom handla om barns och elevers lärande (a.a.) Det innebär att lärares professionella lärande ba-

seras på det som gör skillnad för barns/elevs lärande, genom cykliskt undersökande och kunskapsbyggande kollaborativt arbete, tillsammans med undervisningsnära forskning som bidrar till lärarnas kunskapsutveckling (Timperley m.fl., 2007). Meaney m.fl. (2012) belyser problematiken att involvera alla deltagare under en insats. I deras resultat framträder att lärare som är inkluderade, upplever samhörighet med eller användbarhet av insatsens innehåll i sin praktik har större benägenhet och vilja att förändra sin undervisning. Bonghanoy m.fl. (2019) lyfter hur matematiklärarna som ingick i deras studie hävdar att insatser som de deltagit i inte utgått från deras egen verksamhet utan snarare baserats på generella antaganden om elevers utvecklade lärande, som lärarna förväntas applicera i sin undervisning, vilket minskar insatsens användbarhet. Genom att studera insatsers effektivitet framträder betydelsen av att förändra även fortbildningsinslagen för matematiklärare från att baseras på generella antaganden till ett mer deltagandeperspektiv för att bidra till professionsutveckling:

In contrast to the training model of professional development, we characterize the practice-based model as focused primarily on expanding teachers' participation in the practices of what constitutes teaching. (Matos m.fl., 2009 s. 167)

En viss enighet förekommer om hur insatser ska iscensättas för att främja förändring, till exempel att insatsen ska vara i linje med nationella mål och riktlinjer, innehålla ett ämnesspecifikt innehåll samt hur detta ska undervisas (Desimone, 2009; Marrongelle m.fl., 2013; Timperley m.fl., 2007; Wayne m.fl., 2008), och att insatsen ska utgå från lärarnas identifierade problemområde under kollegiala former (Clarke, 2007; Matos m.fl., 2009; Timperley m.fl., 2007). Trots denna enighet finns det få studier som fokuserar på dess effektivitet för att förändra lärares förståelse om sin undervisning (Cobb & Jackson (2011; Wayne m.fl., 2008). Lindvall (2016) visar i sin studie hur samma kollaborativa insatser i olika skolformer ledde till olika resultat. I studien framkom hur elevernas resultat i årskurs 1–5 förbättrades under insatsen, medan elevresultaten i årskurs 6–9 försämrades. Hon menar dock att insatsers effekt kan ha en viss eftersläpning avseende elevernas förbättrade resultat.

Flera oberoende storskaliga studier (Hattie, 2013; OECD, 2014) har identifierat lärarnas samarbete som en nyckelfaktor för professionell utveckling som bidrar till elevers lärande. Organisationen för ekonomiskt

samarbete och utveckling (OECD, 2014) och Hattie (2013) konstaterade att effektiv professionsutveckling bör placeras så nära praktiken som möjligt, och att forskningsfrågorna bör komma från praktiken, samt genomföras på lärarnas arbetsplatser och som en form av forskningsbaserat professionellt samarbete om sin egen undervisning.

För att utforma undervisningsutvecklande utbildningsinsatser för lärare krävs god kunskap om den rådande situationen i förskola och grundskola avseende matematikundervisningens utformning, men även vilket matematiskt innehåll lärare ska behärska. Goulding m.fl. (2002) undersökte grundläggande matematiska planeringskunskaper hos lärare och påvisade begränsningar avseende lärarnas planerings- och undervisningsförmåga. Dessa begränsningar kan till viss del förklaras med eventuella brister i ämneskunskaper. Hill m.fl. (2005) visar att ämneskunskaper för lärare som ska undervisa matematik i årskurs 1 hade inverkan på deras matematikundervisning, som i sin tur påverkade elevernas resultat i matematik. Rowland m.fl. (2000) studerade hur förskollärarstudenters svaga matematiska kunskaper renderade i sämre resultat även inom undervisningspraxisen (s.10). Tutak och Adams (2017) har i sin studie sett att lärarstudenter som saknade kunskaper inom det geometriska innehållet ändå förbättrade sina färdigheter genom att undervisa elever, vilket visar att lärare utvecklar sin kunskap kontinuerligt i sin verksamhet.

2.2 Kollaborativ klassrumsforskning

Kollaborativ klassrumsforskning innebär att lärare involveras aktivt i forskningen, och där problemställningen utgår från undervisningspraktikens behov och erfarenhet. Denna form av forskningsinriktning har ökat under senare år, där modeller som till exempel designexperiment, designforskning, utvecklingsforskning, formativ forskning, lärarforskning, aktionsforskning, praktikutvecklande forskning, Lesson och Learning study ingår (Carlgren, 2012; Christersson, 2018). Det gemensamma inom flera av ansatserna är att det karakteriseras av iterativ process, vilket innebär ett cykliskt förlopp där teori och praktik ömsesidigt används för att skapa förståelse för problematiken. Genom det cykliska förloppet används genererat resultat från en cykels utgångspunkt till nästa, i en kumulativ process. Vidare skiljer dessa forskningsansatser sig från ansatser som observerar och

beskriver praktiken som den är, eftersom teorigrundad undervisning iscensätts och prövas för att utveckla undervisningen. Om den iterativa processen utgår från ett teoretiskt ramverk då interventionerna analyseras så kan resultaten även bidra till teoribildning (Van den Akker, 1999).

För att bidra med teoriutveckling i utbildning bör ett problembaserat utvecklingsforskningssystem skapas, där högskolor och universitet samarbetar med alla skolnivåer genom partnerskap på lika villkor för att generera kunskaper om lärande (Goodlad, 1991; Herro m.fl., 2019). Även i Sverige finns en ambition att öka inslagen av praktikutvecklande forskning som betonar samarbetet mellan forskare från universitet och lärare i skolan (Christersson, 2018). Klyftan mellan teori och praktik behöver överbryggas genom att involvera lärare i forskningsprocessen, för att gemensamt arbeta med förändring och förbättring av klassrumspraxis tillsammans med läraren (Carlgren, 2013; Vetenskapsrådet, 2017). Enligt Christersson (SOU, 2018:19) innebär detta tillvägagångssätt en förskjutning av begreppet problembaserad utvecklingsforskning till undervisningsutvecklande forskning. Denna form av forskning som kallas praktikbaserad professionsutbildning (Practise based professional development PBPD) är ett begrepp som använts för kompetensutveckling som syftar till att förbättra skolans undervisning (Ball & Cohen, 1999), där lärares utveckling är i fokus (Harris m.fl., 2012). PBPD kännetecknas av intresse som främst syftar till att bidra med kunskap om hur undervisning kan utvecklas och förbättras i syfte att främja elevresultat och lärande (Ball & Cohen, 1999; Gardner, 2011; Harris m.fl., 2012). Forskningen bedrivs i klassrummet och kännetecknas av den iterativa processen, samarbete mellan forskare och lärare, processinriktning och användbarhet i praktiksammanhang.

Samarbete med lärare i forskningsbaserade projekt, som syftar till att utveckla undervisning, kan dock ibland uppfattas vara mindre vetenskapliga än forskning som objektivt studerar klassrummet utan att påverka den pågående undervisningen (Holmqvist, 2017). Ett skäl till det är att praktikutvecklande forskningsstudier kan vara svåra att replikera, och de variabler som studeras kan vara svåra att kontrollera. Utbildning är utmanande att undersöka, eftersom det är en komplex arena med variabler som inte alltid kan separeras från varandra och som därmed kan vara svåra att observera. För att bidra till skolans utveckling av undervisning på vetenskaplig grund, i syfte att förbättra elevens lärande, måste modeller utvecklas för denna typ av forskning (Christersson, 2018). Att studera undervisning, utan att jämföra

eller förbättra praxis, av rädsla för att göra felaktiga antaganden om vad som fungerar bidrar inte till förändring i klassrummet (Holmqvist, 2017).

2.3 Kollaborativ professionsutveckling

I TALIS (OECD, 2014;19) framträder en signifikant korrelation mellan lärarens undervisningsförmåga och hur stor del de deltar i mentorskapsaktiviteter, samt hur ofta de får feedback från skolledare och kollegor. Genom att delta i kollaborativa professionsutvecklingsinsatser utvecklar lärare sin förmåga att undervisa, vilket i sin tur bidrar till elevernas ökade kunskaper (Timperly, 2015). Samtidigt har PBPD som syfte, enligt Ball och Cohen (1999), att förstå relationen mellan undervisning och lärande. Ball och Cohen hävdar att professionsutveckling för lärare kan utvecklas om de utgår från och sker i lärares praktik: "Professional development could be substantially improved if we could develop ways to learn and teach about practice in practice" (Ball & Cohen, 1999. s. 11). Enligt Smith (2001) ger PBPD lärare möjligheter att genom reflektion av sin egen undervisning utveckla ny medvetenhet och kunskap om undervisning genom professionsutveckling i densamma.

Det finns ett antal olika modeller av kollaborativ professionsutbildning, som bidragit med kunskap om hur undervisning kan utformas för att utveckla elevernas lärande. Avgörande för val av modell är problemområde och frågeställningar. En iterativ process och öppenhet för att samarbeta, diskutera och observera varandras lektioner verkar dock vara avgörande modellkomponenter (Harris m.fl., 2012; Lewis, 2009; Timperley, 2015). De som är vanligast förekommande inom svensk professionsutbildning för matematiklärare, oavsett om det är inslag i lärarutbildning eller som kompetensutveckling, är lesson och learning study.

2.3.1 Lesson study

Under det senaste århundradet har Lesson study varit betydelsefull (Wood, 2019) för att förbättra lärarnas lärande (Pêna Trapero, 2013), vilket bidragit till förändringar i lärarnas klassrumspraxis (Vrikki m.fl., 2017; Warwick m.fl., 2019). Lesson study, som på japanska heter Jugyuu kenkyuu (Yoshida, 1999), är en modell där lärarnas professionsutveckling bygger på kollaborativt arbete i syfte att kontinuerligt förbättra undervisningen (Lewis, 2009). Lesson study har utvecklats i Japan och översatts till lesson

study (lektionsstudie) av Stigler och Hierbert (1999). Lewis (2002, 2009) argumenterar för att Lesson study är studiet av designade forskningslektioner, där lärares förståelse ökar genom reflektion av den egna undervisningen. Detta skiljer sig från modeller där någon utomstående genom föreläsningar eller seminarier berättar om hur lärare ska förändra sin undervisning, genom fortbildningsinsatser som genomförs utanför praktiken (Lewis & Tsuchida, 1997). I stället sker professionsutveckling i Lesson study genom att kollaborativt analysera vad som sker i klassrummet, med särskilt fokus på elevernas möjligheter för att lära som därefter reflekteras (Lewis, 2009).

Arbetsgången i en Lesson study är cyklisk och inleds med att lärarna identifierar ett område där de vill utveckla undervisningen för att elevernas lärande ska öka. Därefter tar de reda på vad eleverna redan kan, innan en forskningslektion planeras av lärargruppen. En av lärarna i lärargruppen genomför därefter lektionen, samtidigt som andra lärare observerar forskningslektionen. Därefter studerar man vad eleverna lärt sig, och i ett seminarium efter lektionen diskuterar den undervisande läraren och de observerande lärarna sina respektive analyser av lektionen (Doig & Groves, 2011; Lewis, 2009; Lewis & Tsuchida, 1997; Stigler & Hiebert, 1999).

Lesson study kan användas både som ett professionellt utvecklingsverktyg för att förbättra lärarnas undervisningsdesign och ämneskompetenser, som forskningsmetod och som en kombination av professionsutveckling och forskning (Holmqvist & Mattisson, 2008; Stigler & Hiebert, 2016).

2.3.2 Learning study

En Learning study är en form av Lesson study där likheterna utgörs av den kollaborativa iterativa processen och skillnaden i användandet av teoretiskt ramverk (Elliot, 2012; Holmqvist, 2011; Marton & Tsui, 2004). Båda ansatserna har undervisningsinnehåll i fokus. Ett sätt för lärare att utveckla sin undervisning är att diskutera vad som krävs för att lära sig något specifikt innehåll eller förmåga, vilket sker i en Learning study (Runesson, 2015). Learning study utgår från teoretiska antaganden, där variations-teorin i flera studier använts (Cheng & Lo, 2013; Holmqvist Olander & Bergentoft 2014; Marton & Pang 2006; Marton & Tsui 2004).

Learning study använder en jämförande metod där olika undervisningsdesigner provas i olika elevgrupper för att hitta det mest kraftfulla sättet att utveckla elevernas kunskap av det som är föremål för lärande (Kullberg

m.fl., 2017). Lektionerna har planerats med utgångspunkt i de kritiska aspekterna, det vill säga de aspekter av innehållet som eleverna ännu inte urskiljt eller behärskar. Innehållet behandlas på ett sätt som möjliggör för eleverna att urskilja dem och därmed utveckla sin förståelse för innehållet. Designen av lektionerna har utformats på grundval av vikten av att skapa ett variationsmönster där aspekter av innehållet lyfts fram på olika sätt som delar av en helhet (Kullberg m. fl., 2017). I en studie av Pang (2003), framkommer till exempel att den kritiska aspekten för att förstå vinkelns storlek var vinkelbenens längd. Eleverna trodde att om vinkelbenens längd var längre ökade vinkelstorleken. Lektionerna designades utifrån denna kritiska aspekt, där vinkelbenen var olika långa men vinkeln densamma för att visa att vinkelbenens längd inte har betydelse för vinkelstorleken. Resultaten visade positiv effekt för elevernas kunskap

2.4 Professionsutbildning för matematiklärare

Fem praktikutvecklande forsknings- och utvecklingsmodeller beskrivs som representativa för utveckling av lärares (MPCK) matematiskt pedagogiska kunskaper (Lesson Study, Educational Action Research (aktionsforskning), Teacher Research groups, EDR/Educational Designbased Research, och Learning Study) och som dessutom fokuserar på undervisning.

Loucks-Horsley och Matsumoto (1999) har studerat lärarnas professionella undervisningsutveckling, och lyfter fram att det finns få artiklar som undersöker sambandet mellan lärarnas professionella utveckling och elevernas resultat. De menar att det kan bero på svårigheter att identifiera just ett sådant samband, och att forskare därmed undviker denna typ av komplexa forskningsfrågor. Cobb m.fl. (2003) visar att det finns metoder som kan användas för sådana studier och konstaterar att: "A primary goal for a design experiment is to improve the initial design by testing and revising conjectures as informed by ongoing analysis of both the students' reasoning and the learning environments" (s. 10). Resultatet kan användas för att stödja lärares förståelse av hur utformningen av deras undervisning påverkar elevernas arbete i klassrummet.

Learning study-modellen syftar inte till att fokusera lärarnas professionella utveckling som sådan, utan dess fokus är främst på hur innehållet hanteras och hur skillnaderna i den konstruerade undervisningsdesignen på-

verkar elevernas läranderesultat (Pang & Ling, 2012). Forskare inom aktionsforskning studerar mer sällan förhållandet mellan undervisning och lärande (Loucks-Horsley & Matsumoto, 1999). Forskare som använder EDR (Gravemeijer & van Eerde, 2009) och Learning studys (Lo, 2009) synsätt tycks dock i större utsträckning finna möjligheter att genomföra denna typ av forskning. Det är betydelsefullt att belysa att ingen av modellerna är statiska, vilket innebär att de utformas utifrån praktikens behov och frågor, vilket innebär att samma modell kan utformas olika beroende av lärares identifierade problemområde (Holmqvist, 2017). Problemområde och frågeställningar kan också innebära att man behöver reflektera över vilken modell som ska användas i forskningen. Forskare verkar ha tagit för givet att empiriska förhållanden, såsom statistiska korrelationer, mellan läraraktioner och elevprestationer är allt som behöver identifieras för att fastställa hur undervisning relaterar till lärande (Nuthal, 2004). Det behövs mer forskning för att identifiera vilka modellkomponenter som påverkar både lärar- och elevutveckling oavsett modell (Holmqvist, 2017).

Utbildning av lärare i matematik bygger på att de utvecklar kunskap både i ämnet och i hur man ska undervisa detta för de elever de är utbildade att undervisa (Sowder, 2007). Rowland och Barber (2002) visar att lågstadielärare som har djupa ämneskunskaper utformar en mer effektiv undervisning. Undervisning av blivande matematiklärare ska dock även erbjuda möjlighet att utveckla pedagogisk innehållskunskap (pedagogical content knowledge, PCK), kunskap för att undervisa i matematik (Shulman, 1986). Flera forskare ser denna kunskap som avgörande för att lärare ska ha möjlighet att utveckla effektiv matematikundervisning (Kaufmann & Ryve, 2019; Sullivan, 2008).

2.4.1 Lärarutbildning

Hodgen och Askew (2007) anser att det finns en problematik att utbilda lärarstudenter till matematiklärare, på grund av deras egna skolrelaterade erfarenheter. Blivande lärares egen skolgång har större påverkan för blivande matematiklärare än vad lärarutbildningen har (Philipp, 2007). Om detta stämmer får det konsekvenser genom hela skolsystemet, genom att blivande matematiklärare fortsätter att bygga på egna erfarenheter och kunskaper trots lärarutbildningens intention att förnya. Cooney (1999) menar att dessa erfarenheter kan utgöras av tankar om sin egen roll som lärare,

där de väljer att fokusera på omsorg av eleven i stället för att rikta uppmärksamheten på det matematiska innehållet i aktiviteterna. Enligt Gellert (2000) kan detta ha grundats i egna erfarenheter av att ha behövt kämpa för att förstå matematik. Det innebär att läraren genom sin omsorg av eleven att inte behöva uppleva känslor av misslyckande väljer att förenkla det matematiska innehållet. Lärarstudenterna som vill ge sina elever en mildare matematikundervisning gör att det primära målet för skolan snarare blir social utveckling än utveckling av specifikt innehåll, vilket anses vara problematiskt för elevers matematiska kunskapsutveckling (Cooney, 1999; Gellert, 2000; Stoeck, 2015). Cooney (1999) lyfter hur blivande lärares konceptualisering av matematikundervisning även kan tillämpa ”undervisning som berättande”. Det innebär att de blivande matematiklärarna ser matematikundervisningen som något som ska berättas för eleverna, det vill säga att de förklarar vad eleverna ska göra och hur saker och ting är, och utifrån detta antar de att de lär sig.

Utbildningsdepartementet (2010) indikerar att kunskaperna i matematik är låga, vilket har inneburit att inte bara barn ska erbjudas tidiga insatser i matematik, utan även blivande lärare behöver lära sig mer matematik under sin utbildning. Askew (2008) menar att detta främst beror på att uppmärksamheten fokuserats på vad blivande lärare inte vet, i stället för vad de vet. Dessutom argumenteras från politikerhåll att mer kunskap i ämnet är det som krävs.

Trots att lärarutbildningen främjar en annan syn, upplever lärarstudenter att det inom lärarutbildningen ser likadant ut som när de gick i skolan (Player-Koro, 2011). Det är för mycket matematik och för lite innehåll om att undervisa i matematik (a.a.). Som lärarutbildare är det därför viktigt att ifrågasätta hur matematikinnehållet presenteras inom lärarutbildningen (Beach & Player-Koro, 2012). Det kan vara betydelsefullt att presentera andra saker eller innehåll, än det som lärarstudenterna har med sig sedan tidigare som kan relateras till matematik (Ebby, 2000). Det kommer, enligt Ebby (2000,) att utmana lärarstudenternas tidigare erfarenheter av matematik och främja nya färdigheter om lärandet i matematik om de möter en variation av vad matematik kan vara och hur undervisning kan utformas. Till exempel ska lärarutbildningen främja kreativitet och felsvar, vilket Güven och Dedes (2017) visade saknades i den studie som de genomförde i en matematikkurs för blivande lärare. Forskarna betonar betydelsen av att

studera vilka föreställningar som etableras inom utbildningens matematikkurser, eftersom dessa i sin tur inverkar på blivande lärares lärande om matematikundervisning. Lärarutbildare måste reflektera över vilken typ av erfarenhet lärarutbildningen speglar, när det gäller vilka matematiska perspektiv som representeras och hur dessa relateras till lärande och undervisning i matematik på grundnivå (Felton-Koestler, 2015). Lärarutbildningen syftar till att utveckla både studenters förmåga att undervisa och lärande (Rowland m.fl., 2014). Genom att se sig själv som lärande student, till att lära andra lära matematik i skolan som blivande matematiklärare, utvecklar lärarstudenternas yrkesidentitet.

Eftersom resultat från studier inom matematikdidaktisk forskning visar ett samband mellan lärarnas didaktiska kunskap och kvalitén på deras undervisning (Shulman, 1986; Ball m.fl., 2008), finns det behov av forskning som bidrar till vår förståelse för hur lärarutbildning kan stimulera kunskap, intresse och engagemang hos blivande lärare (Philipp, 2007) och yrkesverksamma lärare. Utvecklingen av effektiva undervisningsmetoder ställer krav på lärarnas förmåga att utvärdera elevernas kunskaper och att använda denna information för att utforma lektioner. I vissa fall har dock fokus varit mer på metod- eller procedurfrågor än fokus på vad som behövs för att lära sig ett specifikt innehåll. Skott m.fl. (2018) undersökte hur lärarnas kunskaper utvecklades och påverkades av praktiken. De hävdar att fokus har riktats mot allmänna didaktiska färdigheter, med relativt lite intresse för hur innehållskunskap kan undervisas och förstås inom specifika ämnesområden.

3 MATEMATIKUNDERVISNING I FÖRSKOLA OCH GRUNDSKOLA

Det matematiska innehåll som en lärare förväntas behärska avgränsas (men begränsas inte) av den matematikundervisning de förväntas genomföra, vilket styrs av läro- och kursplaner. En översikt av matematikundervisning i förskolan och grundskolans årskurs 4–6 presenteras i detta kapitel, eftersom det är dessa två utbildningsgrupper som undervisningen i avhandlingens studier handlar om. Det för att placera avhandlingens ingående studiers matematiska innehåll samt hur detta beaktas i undervisningen inom forskningslandskapet.

3.1 Matematikkunnande

Allt som sker i undervisningssituationer påverkas av den sociala kontext som omsluter lärsituationer, lärarens val och fokus (Insulander m.fl., 2019). I sin tur påverkar detta elevers möjligheter att lära. En aspekt som visat sig vara av betydelse för matematiklärares kompetens är valet av samt hur ett matematiskt innehåll behandlas. För att förstå ett matematiskt problem måste eleven förstå vissa principer. Men för att lösa ett problem måste eleven även förstå vissa procedurer och tillvägagångssätt. Lo och Pong (2005) argumenterar för att fokusering av ämnesinnehållet i förhållande till den aktuella elevgruppen och hur detta lärs är det primära för att utveckla kunnande avseende matematiskt innehåll:

One cannot simply make reference to a set of topics or concepts and their places within the content of structure of an academic discipline, such as mathematics. Rather, the rationale for learning a certain concept must be found

within the encounters between the learners and what is to be learnt. For example, instead of taking the learning of “fractions” as a matter of course in the primary curriculum, we should ask stringent questions about the enabling functions that learning of fractions bring for the learners (Lo & Pong, 2005. s.15).

För att förstå hur ett specifikt innehåll kan undervisas om måste läraren ha kännedom om vilka aspekter som detta innehåll består av, på vilket sätt eleverna förstår dessa aspekter och vad som krävs i en undervisningssituation för att erbjuda dem att urskilja nödvändiga aspekter de ännu inte urskilt. Cobb och Jackson (2011) lyfter i sin studie fram både betydelsen av en väl utvald matematisk uppgift eller aktivitet som bidrag till elevernas ökade engagemang som hur eleverna erbjuds få syn på det matematiska innehållet i uppgiften. Elevers lärande identifieras därmed i relation till vilka aspekter av det valda innehåll som görs möjliga att urskilja genom valda matematiska läraaktiviteter och organisationsstruktur (Runesson, 2005).

Innehållet (vad som ska läras) och hur det behandlas är två viktiga utgångspunkter i matematikundervisningen. Den innehållsliga förståelsen av matematikämnet som sådant, och hur man arbetar för att lösa problem samverkar. Konceptuell kunskap är begreppsligt djupare förståelse av det matematiska innehållet och problemlösningsförmåga. Det behöver inte nödvändigtvis innebära avancerad matematisk förståelse. Barn kan presentera konceptuell förståelse, i förhållande till åldersadekvat utvecklad begrepps-förståelse, som är i linje med de matematiska konventionerna (Star, 2005), och därmed informellt uppvisa problemlösningsförmåga. Skemp (1976) hävdar att samtliga delar för konceptuell kunskap krävs för utvecklad relationell förståelse, tillsammans med förmågan att sätta dessa i nya sammanhang. Lärarstudenter och yrkesverksamma lärare behöver både kunna identifiera och utveckla konceptuellt kunnande utifrån barns och elevers matematiska förståelse. Det är dock betydelsefullt att elever just i de tidiga åren erbjuds att presentera informella, och inte enbart i förväg konstruerade korrekta lösningar, för att främja konceptuell kunskap (Yackel & Cobb, 1996). Informella visualiseringar kan och bör dessutom länkas till vardagliga sammanhang (Ball & Cohen, 1999).

Klimeszwska och Nazaruk (2020) intervjuade 150 lärare i förskoleklass och fann vissa brister i arbetet avseende systematisk progression med matematiska begrepp inom matematikundervisningen. Det var främst kopplat till hur lärarna tog tillvara elevernas ”geometrisk intuition, på ett effektivt

sätt” (s. 345) i vardagliga sammanhang som exempelvis utforskande av begreppen i något mer fria situationer. Samtidigt problematiserar Eriksson m.fl. (2019) matematikundervisning som enbart betonar matematikkunnande utifrån vardagliga sammanhang och inte erbjuder eleverna att urskilja de formella matematiska principerna. Enbart undervisning med fokus på teoretisk förståelse av ämnet bidrar dock inte heller till konceptuellt kunnande (Ball & Cohen, 1999). Konceptuellt kunnande bygger snarare på att erbjuda och uppmärksamma eleverna på fler representationer inom ett matematiskt område, i syfte att utveckla elevers förståelse och förmåga att använda informella strategier (Hemmi & Ryve, 2015). En konceptuell förståelse bygger även på rika nätverk mellan olika matematiska områden, för utveckling av fördjupade kunskaper om mönster och samband. Kazemi och Stipek (2001) undersökte hur konceptuellt lärande etablerades i årskurs 4 och 5. Genom att videofilma interaktionen i elevernas diskussioner i klassrummet identifierades konceptuellt lärande vid matematiska förklaringar innehållande argumentation för och emot en Lösningstrategi, och inte enbart beskrivningar av lösningar. Ett matematiskt tänkande utvecklades genom eleverna förståelse av flera olika lösningar och dess relationer. Dessutom, ökade felaktiga svar möjligheten att utforska kunskaperna om problemets karaktär och därmed föreslå fler strategier.

Uppgiftskonstruktioner och tillhörande didaktiska undervisningsmetoder är avgörande för att belysa, fånga intresse och behålla intresset för att optimera lärandet för främjande av konceptuell kunskap (Chapman, 2013). Om informella lösningar anses främja konceptuellt kunnande är det betydelsefullt att läraren har förmåga att belysa detta (Yackel & Cobb).

The increasingly sophisticated way they select tasks and respond to children's solutions, shows their own developing understanding of the students' mathematical activity and conceptual development. (s. 466)

Att observera och interagera tillsammans med sina elever under lärandeprocessen (alltså inte bara vid redovisningen), kan utveckla lärarens egna såväl som sina elevers möjligheter för att utveckla konceptuellt matematiskt kunnande (Cobb & Yackel, 1996; White, 2003). White (2003) beskriver framgångsrik undervisning som framkallande av elevlösningssmetoder, som stöder elevernas konceptuella förståelse och utvidgar elevernas tänkande. Det innebär att läraren inkluderar och påverkar det matematiska tänkandet hos alla sina elever. Lärarrollen innebär att värdera elevers idéer,

utforska elevernas svar, införliva elevernas grundkunskap och uppmuntra elev-till-elev-kommunikation (White, 2003).

Både konceptuell och procedurell kunskap krävs dock för att lösa matematikuppgifter. Algoritmisk procedurell kunskap är betydelsefull för att utveckla förståelse för olika beräkningskonventioner (Hiebert & Lefevre, 1986). Det måste finnas en balans inom undervisningen gällande utvecklande av procedurell och konceptuell kunskap (a.a.), för att utveckla barns och elevers matematikkunnande.

3.2 Matematik i förskolan

I läroplanen för förskolan Lpfö18 (Skolverket, 2018) har undervisningsbegreppet förtydligats. Det har dock ännu inte hunnit produceras så mycket forskning om på vilket sätt detta har påverkat utformningen av undervisning och barnens möjligheter till matematiklärande i förskolan. Matematikämnets strävansmål lyfter fram verksamhetens betydelse för utveckling av barnens matematiska förståelse. I linje med undervisningsbegreppets förtydligande har även fokus riktats mot barns utvecklade kunnande. Det bidrar till funderingar över hur matematiskt kunnande utvecklas genom vilka lärotillfällen som erbjuds i förskolan (Alkhede, 2021). Samtidigt uppkommer även funderingar gällande vad som är matematisk kunskap inom förskolan. En förskollärares uppfattning om sitt uppdrag påverkar rimligtvis vilken kunskap eller förståelse som förmedlas i undervisningen i förskolan (Jonsson m.fl., 2017). Det påverkar även på vilket sätt kunskapen förmedlas i undervisningen.

3.2.1 Lekorienterad undervisning

Matematiska områden i lek är ofta relaterade till barns vardagliga upplevelser, konkreta som abstrakta (Sarama & Clements, 2009). I leken kan fler spontana lärotillfällen erbjudas och rendera matematisk kunskap. Barns deltagande i lek i förskolan har studerats inom olika ämnesområden, samt mer generellt om hur barn involveras i lekbaserade aktiviteter (Ghafouri & Wien, 2005; Presser m.fl., 2015; Pyle m.fl., 2017; Pyle m.fl., 2018; Sim & Xu, 2017; Synodi, 2010; Van Oers & Duijkers, 2013). Forskningsfältet är stort avseende hur lek används för att fånga matematiskt innehåll, vilket inkluderar lekbaserat lärande (Pyle m.fl., 2017; Wickström m.fl., 2019). Detta är en inriktning som inte i så stor utsträckning har haft fokus på hur

lärare guidar barnen i syfte att utveckla matematisk förståelse (Wickström m.fl., 2019). Det finns även få studier om hur fria eller ostrukturerade lekorienterade situationer bidrar till matematiskt lärande (Zippert m.fl., 2019). Daniels och Pyle (2018) hävdar att en bredare definition av lekbaserat lärande, där lärare tar på sig olika roller och erbjuder fler leksituationer, skulle kunna bidra till fler studier inom detta område. Sim och Xu (2017) identifierade ett gap i sin studie inom detta forskningsområde. Deras resultat visade att barn utvecklar sin egen kunskap i fria leksituationer, men lärare urskiljer inte alltid vilken kunskap det kan relateras till. Ett antal länder, inklusive Sverige, har långvariga traditioner av läroplaner som baseras på lekbaserat lärande (Pyle m.fl., 2017).

Lärarnas förståelse för förhållandet mellan lek och kunskapsutveckling hos barn är dock en grundläggande pedagogisk fråga (Daniels & Pyle, 2018). Pyles m.fl. (2017) identifierar, i en forskningsöversikt, två olika perspektiv på lärarens roll i leken, beroende på vad barnen skulle lära. Studier som fokuserade på barns utveckling belyste värdet av att erbjuda barn fri lek och en passiv lärare. Om studien däremot fokuserade på akademiskt lärande belyste de värdet av ömsesidigt riktad lek, där läraren tar en mer aktiv roll i undervisningen. Resultat i tidigare studier betonar vikten av vuxnas engagemang för att utvidga en individs kunskaper och föra in ny information (Klahr, 2009). Läraren behöver dock ha kunskaper om vilka aspekter som ska lyftas fram i undervisningssituationen för att utveckla barnens matematiska kunskap (Alkhede, 2021). Det sätt som undervisning kan ske på i förskolan varierar (a.a.). Utifrån sina resultat hävdar Fisher m.fl. (2013) att guidad lek är den optimala inlärningssituationen. I Wickström m.fl. (2019) studie framkom dock att den vanligaste formen för att stödja barns matematiklärande i förskolan var direktinstruerade metoder och lärarstyrd lek. Alrø och Johnsen-Høines (2010) lyfter fram behovet av fler utforskande undervisningsmetoder för matematikundervisning riktat mot de yngre åldrarna.

Vad som menas med att lära genom lek kompliceras ytterligare av att det inte finns någon enhetlig definition av vad lek är (Helenius m.fl., 2016). Definitioner kan variera från ett antagande om att lek måste vara barninitierad, till att lek definieras som vuxeninitierade aktiviteter som kännetecknas av lekfullhet (Roskos & Christie, 2000). Barninitierade situationer ska ge barnen möjlighet att välja sin lekform, ofta rekommenderad som sociodramatisk lek, där grupper av barn övar på fantasifulla rollspel genom

att skapa och följa sociala regler samt låtsas vara olika familjemedlemmar (Elias & Berk, 2002). Men den valda situationen behöver inte vara fri från lärarengagemang (van Oers, 2014). I Daniels och Pyles (2018) studie uttryckte lärarna svårighet att forma en mellanväg mellan fri lek och riktade lärarinstruktioner. Vidare framkom även problem med hur de kunde optimera engagemang för att under lek stödja lärande i matematik. Cohrssen m.fl. (2016) visade dock i sin studie att om lärare erbjuds stöd att utgå från lekbaserade aktiviteter kan detta påverka deras upplevelse av ämnet positivt och därigenom positivt påverka deras praktik. I leken engagerar barn sig i rollspel och konstruktion, vilket utvecklar deras resonemangsförmåga för att föreslå och testa hypoteser medan de arbetar tillsammans. Det är i linje med Sarama och Clements (2009) argument för att utveckla kompetenser som utgör kärnan inom matematik och stödjer barns tänkande. Dessutom hjälper sociala sammanhang till att utveckla barns motoriska färdigheter, sociala interaktioner och relationer. Sociala interaktioner mellan kamrater kan också bidra till att identifiera barns matematikrelaterade lek (Zippert m.fl., 2019).

Zippert m.fl. (2019) visade dessutom hur ålder och samarbetsinlärningsförmåga tenderar att påverka frekvensen av engagemang i förhållande till verbala uttryck inom uppräknings, storleksordning och rumsliga begrepp. Utifrån sina resultat efterfrågar de mer forskning i fria leksituationer för att identifiera hur lärarnas matematiska instruktioner kan bidra till barns utveckling. Zippert m.fl. (2019) betonar vikten av att även observera handlingar (icke-verbala) i en inlärningsprocess. Det kan till exempel vara när barn organiserar bilar och dockor, eller placerar sig i olika utrymmen för att bidra till att leken fortsätter. När barn är engagerade i en tolerant miljö, där de kan göra misstag tillsammans med andra barn och lärare, kan de utveckla sina interaktioner på ett meningsfullt sätt (Perry & Dockett, 2007). I en sådan inlärningsmiljö kan individer dela sin egen förståelse för leksituationen, och andra kommer att respektera dem för det (Helenius m.fl., 2016).

En lekorienterad undervisningsmetod uppmuntrar barn att plocka upp informell matematik, det vill säga matematik i vardagliga sammanhang som läraren samtidigt kan observera. Det kan innebära att barn erbjuds att kunna väga, mäta jämföra och klassificera (Doverborg & Pramling Samuelsson, 2011). Den informella matematiska undervisningsstrategin, med ett lekorienterat tillvägagångssätt, antas övergå till en mer formell

matematisk undervisning med fler formella begrepp allteftersom barns förståelse utvecklas (Ginsburg m.fl., 2008). Här sammanflätas konceptualiseringen av matematik och matematikundervisningen (Cohrssen m.fl., 2016). Pramling Samuelsson och Asplund Carlsson (2008) argumenterar för att lek på förskolan inte kan skiljas från lärande. Vogt m.fl. (2018) stödjer detta resonemang utifrån sina resultat genomförda i förskoleklass och menar att leken i sig kan främja både abstrakt tänkande och bibehålla intresset för ämnet, speciellt för de barn som kommit längre i sin matematiska utveckling. I skolan signaleras tydligt både när det är matematikundervisning och vad den ska innehålla. Både lärare och elever vet när och vad som förväntas av dem för att nå målen inom matematikämnet. Det är inte lika definierbart inom förskolan vad som är matematik och vad som är matematikundervisning (Doverborg & Pramling-Samuelsson, 1999), vilket ökar behovet av studier som fokuserar på hur lärare i förskolan förstår sin matematikundervisning.

3.2 Matematik i grundskolans årskurs 4-6

I svenska styrdokument (Skolverket, 2018) baseras matematiklärande på innehållet som eleverna förväntas behärska, samt vilka förmågor de ska utveckla (Niss & Højgaard Jensen, 2002; Kilpatrick, 2001). Det innebär att undervisningen ska främja exempelvis utvecklandet av elevers resonemang om medelvärde samt bedöma detsamma i årskurs 4-6. Till exempel genom kommunikativa sociala aktiviteter, som öppnar upp för konceptuell förståelse (Kilhamn & Skodras, 2018), till skillnad mot fråga- svarsmodeller (Alrø & Johnsen – Høines (2010). Samtidigt är det vanligt förekommande att eleverna arbetar individuellt i matematikböckerna (Bergqvist m.fl., 2010; Boesen m.fl., 2014; Johansson, 2006; Löwing 2004). Det innebär begränsningar för eleverna att utveckla resonemang vid individuellt arbete enbart i matematikböcker (Sidenvall, 2015), vilket visat sig vara vanligt förekommande i årskurserna 4-6 (Bieda m.fl., 2014; Sidenvall, 2015; Stylianides, 2009). Studier visar betydelsen av att främja aktiviteter som synliggör elevers resonemang för att belysa deras förståelse av det matematiska innehållets aspekter under inlärningsprocessen (Baxter m.fl., 2005; Cobb, 2002). Det innebär även att när eleven erbjuds föra och följa resonemang i dessa kommunikativa aktiviteter främjas djupare förståelse (Boaler & Staples, 2008). Att enbart främja gruppdiskussioner räcker dock

inte, vilket Fredriksdotter m.fl. (2021) visar. De studerade matematisk problemlösning med fokus på elevdiskussioner i två grupper av elever i årskurs 5. Deras resultat visade hur begränsningar uppenbarade sig i förhållande till elevernas matematiska kunskaper när enbart sociala normer i syfte att alla ska känna sig delaktiga genom att alla erbjuds delge sina tankar, än när innehållet fokuseras. Klassrumsnormerna utgjordes av ett rättvisetänkt snarare än premierande av matematiskt tänkande. Det innebar begränsningar av elevernas möjligheter att utveckla matematiskt lärande.

Studier visar att elever som erbjuds att konstruera egna lösningar och utveckla argument vid problemlösande uppgifter lyckas bättre, samt kommer ihåg bättre än elever som enbart erbjuds procedurella uppgifter (Hiebert, 2003; Johnson m.fl., 2014; Olsson, 2017). Trots det är det senare mer vanligt förekommande nationellt och internationellt (Blomhøj 2016, Boesen m.fl., 2010; Hieber & Groows, 2007). Lärarens betydelse att främja utveckling av argument, exempelvis genom kommunikativ feedback, är av avgörande betydelse för att utveckla elevernas resonemang (Olsson & Tedahl, 2018).

Elevers resonemang bör dock inte utgöras av korrekt svar (Björklund Boistrup, 2010), utan snarare stödja utvecklat matematiskt tänkande (Lithner, 2008). Genom videoobservationer undersökte Makar (2014) lektioner hur elever i 10-årsåldern fördjupade sin förståelse avseende lägesmått. Resultaten visade att eleverna som fått problemlösande uppgifter om det matematiska innehållet blev mer precisa i sitt resonemang när de erbjöds förklara sitt tänkande. Det innebar att de kunde distansera sig från kontextuella data till ett mer generellt resonemang om dekontextuella data. Även Bjurland m.fl. (2008), som studerade elever i årskurs 6, identifierade betydelsen av att erbjuda eleverna resonemang genom kommunikativa aktiviteter för att främja matematisk förståelse av diagram. Barrers m.fl. (2006) studie visar hur årskurserna 2-10 elevers generella resonemang fördjupas allteftersom eleverna blev äldre. Samtidigt påvisar Jurdak och Mounhayars (2014) studie att alla elever i årskurs 4-11, fördjupade sina resonemang. Det var snarare hur läraren specifikt mötte sin elevgrupp utifrån valda uppgifter och material som var avgörande än ålder.

Skemp (1976) hävdar att lärare grovt kan delas in i två olika grupper. Den ena gruppen undervisar för att eleverna ska lära sig att utföra procedurer som de ska använda när de räknar. Den andra gruppen av lärare undervisar för att elever ska få en förståelse för att veta vad som ska utföras

och varför. Den senare gruppen uppmuntrar till ett mer undersökande arbetssätt med fokus på elevens lärandeprocess (Yackel & Cobb, 1996). Det innebär ett arbetssätt som enligt Alrø och Skovsmose (2002) uppmuntrar eleven till att ställa frågor och arbeta undersökande tillsammans. Det finns tendenser att röra sig från mer traditionella fråga-svarsmönster (Alrø & Johnsen – Høines (2010) till mer undersökande arbetsformer för att nå detta förbättrade elevresultat (Clewel m.fl., 2005; Goldsmith m.fl., 2014).

Hur ett lärandemål behandlas påverkas även av den kulturella kontext lärarna befinner sig i (Insulander m.fl., 2019). Svenska styrdokument är allmänt hållna och lärarna kan göra flera olika tolkningsmöjligheter (a.a.). Insulander m.fl. (2019) belyser skillnader i hur lärare i Sverige agerar i klassrummet jämförelsevis med Finland. Svenska lärare intar snarare en handledande funktion. Pang (2003) belyser i sin studie betydelsen av att lärare riktar fokus på urskiljning av lärandeinhåll. I hans studie framträder hur en elev i 10-årsåldern erbjuds urskiljning av en grafs representation när aspekterna i förhållande till position och hastighet synliggörs samtidigt. Studiens resultat påvisar betydelsen av att lärandeinhållets egenskaper synliggörs för att öka elevens möjligheter att urskilja fenomenets innebörd, och att lärarens undervisning på så sätt blir avgörande för vilka möjligheter en elev erbjuds lära, oavsett ålder. Det innebär att även lärarutbildare behöver utveckla sitt kunnande om hur undervisningen erbjuder lärarstudenter att lära ett innehåll samt hur detta i sin tur undervisas för elever.

3.3 Matematiskt innehåll i studierna

Med utgångspunkt i ett situerat lärande (Lave & Wenger, 1991) sker en process som formas med och av deltagarnas samverkande kontexter. I den här avhandlingen formas denna process tillsammans med det matematiska innehållet som erbjuds att lära genom de kollaborativa undervisningsutvecklande professionsutbildningsinsatserna i respektive studie (1-4). Det matematiska innehållet har i sin tur utvecklats i olika kontexter och kan sägas vara en artefakt för människor med system och regler som delas av människor för att skapa en gemensam kunskap. Det innebär att varje studie i sig bildar ett situerat lärande specifikt format i samverkan mellan de ingående deltagarna och det system som skapats av andra människor över tid, och som utformat matematik som ett verktyg att lösa problem. I de två

första studierna utgörs kontexten av förskola, och i de två andra grundskola. Den matematiska kontexten är avgränsad till de sex matematiska aktiviteterna (Bishop, 1988) i förskolan, medan det är lägesmått och två- och tredimensionella objekt som behandlas i grundskolan.

3.3.1 Matematiska aktiviteter

Mot bakgrund av en lång rad etnografiska och etnomatematiska studier i olika kulturer, argumenterar Bishop (1988) för att det i alla kulturer har utvecklats sex fundamentala matematiska aktiviteter: räkna, lokalisera, mäta, designa, leka och förklara.

En matematisk aktivitet utvecklas när människor deltar i något sammanhang som kan ha flera mål och syften, ofta något helt annat än matematik (Bishop, 1988). I aktiviteten uppkommer mönster och regelbundenhet. I förskolan, skolan eller på fritidsaktiviteter är leken en aktivitet som kan ha fler betydelser än bara en matematisk aktivitet. Det kan innebära att barnen i leken som aktivitet även inspireras till social samvaro i demokratisk anda, övar inflytande, motorik med mera. Bishop (1988) uttrycker att matematik måste förstås som ett slags kulturell kunskap som inte nödvändigtvis behöver ”se” likadan ut och som skiljer sig precis som språk, religion och ritualer från en kulturell grupp till en annan. Matematik är ett exempel på ett kulturellt fenomen, där den teknologiska komponenten har en stor betydelse eftersom det finns ett behov av att utveckla tekniken i relationen mellan människa och omgivning. Matematik i detta sammanhang kan därför uppfattas som en kulturell produkt som har utvecklats som ett resultat av olika aktiviteter. En matematisk aktivitet utvecklas när människor deltar i något sammanhang, som kan ha flera mål och syften, kanske något helt annat än matematik (Helenius m.fl., 2014). En av Bishops (1988) informanter uttryckte följande:

When I asked my Papua New Guinea informant about the areas of the gardens in his village, I drew two rectangles and asked him, if these were gardens which would he prefer to own? “It depends on many things” he said “the soil, the shade, whether it drains well.....” It was clear that my so-called mathematical education had made me look only at the relationship between the numerical sizes of the two gardens. For him, the size of the garden was in many ways its least important feature (Bishop, 1988, s. 38).

Räkneramsor i den tidiga matematikinläringen utgör en representation som exempel på en kulturell kunskap som utvecklats olika inom olika språk och kulturer men förekommer i någon form överallt. Räkneramsor är dessutom en av fem betydelsefulla principer (räkneordens stabila ordning) för utveckling av grundläggande taluppfattning (Gallistel & Gelman, 1992). Det finns utifrån Bishops analyser sex grundläggande aktiviteter som han menar är tillräckliga för utvecklingen av matematiska kunskaper. Han anser att de snarare visar på likheter än olikheter kulturer emellan (Bishop, 1988). De sex aktiviteterna är som följer (utdrag ur Svensson, 2017 s. 42-43):

RÄKNA: Användningen av en systematisk metod för att jämföra och ordna åtskilda fenomen. Det kan innebära att kontrollräkna, eller att använda föremål, speciella nummerord eller namn. Räkna som matematisk aktivitet är både kulturellt och socialt betingat och är starkt förknippat med språket. Olika kulturer har i vissa fall olika sätt att räkna och olika sätt att skriva. Olika kulturer använder olika baser för sitt talsystem.

LOKALISERA: Utforska sin egen rumsliga miljö och begreppsliggöra och symbolisera den med modeller, diagram, ritningar, ord och andra sätt. Denna aktivitet handlar om att beskriva, förstå och kunna hantera placering i förhållande till omvärlden. Först lokaliseras allt i förhållande till en själv. Därefter mellan två objekt, exempelvis lägen som under eller över. Det tredje är att lokalisera objekt i rörelse, olika riktningar.

MÄTA: Att kvantifiera kvaliteter eller bestämma storlek med mål att jämföra och ordna, genom att använda objekt eller tecken som mätningssinstrument med tillhörande enheter eller "måttord".

DESIGNA: Skapa en form eller design för ett objekt eller för någon del av sin omgivande miljö. Det kan innebära att skapa en mental bild av objektet eller symbolisera det på något sätt. Aktiviteten Designa handlar om att tillverka, beskriva och ge form åt objekt och svarar på frågor om vad. Den här aktiviteten handlar både om konstruktion och om hur något kan beskrivas utifrån vilken form det har, såsom kantig, rak, rektangulär.

LEKA: Att utforma och att delta i lekar och tidsfördriv, med mer eller mindre formaliserade regler som alla spelare måste följa. Att leka som en matematisk aktivitet innebär att lek karakteriseras av att tänka hypotetiskt (låtsas om något i leken), modellera (göra om något från verkligheten), abstrahera (föreställa sig inre bilder), gissa, uppskatta, förmoda, anta.

FÖRKLARA: Att hitta sätt att förklara förekomsten av olika fenomen såsom religiösa, animistiska eller vetenskapliga. Det kan ses som en matematisk aktivitet därför att barnet ges möjlighet att svara på frågan varför. Att få resonera, förklara eller motivera varför något blir som det blir gör det möjligt för barnet att förstå fenomen i deras omvärld.

En aktivitet kan antingen utföras på ett ömsesidigt isolerande sätt från övriga matematiska aktiviteter eller kanske mer påtagligt, genom att interagera tillsammans med flera aktiviteter som ”att leka med siffror”. I leken kan barnet exempelvis utforska olika sifferkombinationer såsom i ramsräkande (modeller, abstraktioner) som inte nödvändigtvis behöver stämma överens med ett föreskrivet antal. Dessa aktiviteter har sannolikt utvecklat antal, mönster och magiska kvadrater, och utan tvekan bidragit till att utveckla algebran (Bishop, 1988). Bishop (a.a.) hävdar att i den matematik som han och många andra har lärt sig inom skolmatematiken, har dessa aktiviteter bidragit till åtminstone följande ytterst väsentliga idéer (utdrag ur Svensson, 2017 egen översättning s. 44). Aktiviteterna anger i vilka situationer som barn och vuxna kan ha behov av att använda bland annat matematik.

RÄKNA: Nummer av talsystem. Algebraisk representation. Oändligt stora och små. Händelser, sannolikheter, frekvenser. Numeriska metoder. Iteration. Kombinatorik. Position.

LOKALISERA: Utveckling av koordinater – rektangulära, polära, sfäriska. Latitud/longitud. Riktning (kompass, läge). Vinklar. Linjaler. Nätverk. Resor. Positionsförändringar. Urskiljning av geometriska former (cirkel, ellips, polygon). Rotationsförändringar. Rotation. Spegling (symmetri).

MÄTA: Jämförelse. Ordning (jämförelse i relation till något, exempelvis längre–kortare, tjockare–tunnare). Längd. Area. Volym. Tid. Temperatur. Vikt. Utveckling av enheter – konventionella och standard. Metrik – system (SI). Mätinstrument. Uppskattning. Destination.

DESIGNA: Egenskaper hos föremål. Former. Mönster. Design/konstruktion. Geometriska former [figurer och solida (solids)]. Kongruenta. Skala. Likheter. Förhållande 3:1.

LEKA: Pussel. Paradoxer. Modeller. Spel. Regler. Förfarande. Strategier. Förutsägelse. Gissning. Chansa. Hypotetiskt tänkande. Spelanalys.

FÖRKLARA: Klassificeringar. Konventioner. Generaliseringar. Språkliga förklaringar – argument, logiska kopplingar, bevis. Symboliska förklaringar – ekvationer, formler, algoritmer, funktioner. Figurala förklaringar – diagram, grafer, matriser. (Matematisk struktur – axiom, satser, analys, konsekvens.) (Matematisk modell – antaganden, analogier, generaliserbarhet, förutsägelse.)

Leka som matematisk aktivitet

Det finns likheter mellan akademiska matematikers arbete och barnlek i förskolan (Helenius m.fl., 2016). Detta beror på att de båda tillhör en delad situation där de kontinuerligt förhandlar om vad som kan och inte kan vara matematik. Detta är i linje med hur Bishop (1988) anser att lek utgörs vara en matematisk aktivitet, med både barn och vuxna som möjliga deltagare. Han uttrycker att aktiviteter leder till utveckling av matematik baserat på processerna i situationen, där leken i sig bidrar till utfallet av vilken matematik som kommer till uttryck, samt vilken matematisk lösning som utformas. "Playing contains social procedures and rules of performance: the "as if" of imagined and hypothetical behaviour" (s. 24). Detta står i motsats till upplevelser av matematik som en standardiserad produkt i läroplanen, gällande till exempel "...number, measurement, geometry, and language/logic" (s. 23). Följaktligen beskriver han funktionerna i leken som:

To imagine something, which is the basis for hypothetical thinking and beginning to think abstractly.

To model, which means abstracting certain features from reality.

To formalize and ritualize rules, procedures, and criteria.

To predict, guess, estimate, and assume what could happen.

To explore numbers, shapes, dimensions, positions, and arguments, i.e., engage in the other five mathematical activities in playful ways. (Bishop, 1988. s 24).

Den sista funktionen kan relateras till matematiskt lärande i en lekfull miljö, där barn utforskar matematiska begrepp. I de andra funktionerna relaterar Bishop (1988) snarare leken till ett sammanhang, visualisering och människors interagerande med varandra. Att leka innebär att konstruera och delta i lek och tidsfördriv med varierande grad av formaliserade regler,

som samtliga deltagare måste följa. Leka anses involvera de matematiska aktiviteterna för modellering (det vill säga att föreställa sig via visualiseringar av verkligheten), abstrahera (det vill säga att identifiera de relevanta funktionerna att fokusera på i en given situation), gissa, uppskatta, förutsäga och hypotetiskt tänkande (det vill säga att föreställa sig de potentiella åtgärder som krävs för att fortsätta leken/spelet och börja engagera sig i abstrakt tänkande). Barnet har olika verklighetsbegrepp som det presenterar genom olika modeller som används i leken. Det kan till exempel vara olika roller som affärslek, familjelek, frisörslek eller en picknick, som uttrycks genom lek.

Lekens teman och mål kan ändras av deltagarna i leken (Wood, 2009). När barn föreslår hypoteser i lek testar de nya riktningar som kan förändra modellen. Genom utvecklande av hypotetisk förmåga (testar olika hypoteser) förbättrar de också sin abstrakta förmåga att identifiera vilken situation som är möjlig eller ger de bästa förutsättningarna för förändring. Lärarens roll är viktig för att göra det möjligt för barnet att utveckla en förståelse för de olika aspekterna av sin omgivning (Alkehede, 2021; Weisberg m.fl., 2013). Helenius (2018) ser en möjlighet för lärare att stödja barnen i riktning mot den mer formaliserade matematikundervisningen, genom att utvidga lärarens pedagogiska ansvar till att omfatta ett bredare omfång av sociala aktiviteter än vad som vanligtvis förväntas – att begreppsmässigt utveckla matematisk förståelse genom en lärarstyrd lekbaserad strategi (Pyle m.fl., 2017; Wickström m.fl., 2019) som även baseras på leka som matematisk aktivitet (Bishop, 1988). Det har dock genomförts få studier inom området lek som matematisk aktivitet (Helenius m.fl., 2016).

3.3.2 Lägesmått medelvärde

Matematisk innehållskunskap i den här avhandlingens tredje studie är avgränsad till aritmetiskt medelvärde inom statistik. Det finns föreställningar om att detta är ett enkelt matematiskt begrepp på grund av dess form av enkel beräkning, men det är komplicerat att förstå för den som ännu inte utvecklat sin kunskap om innehållet (MacCullough, 2007). Sullivan och Field (2013) argumenterar för representativa uppgifter för att förbättra konceptuell utveckling och förståelse för matematik. Inom detta specifika begrepp och ämnesinnehåll erbjuds många möjligheter att utveckla konceptu-

ellt kunnande genom representativa uppgifter i det dagliga samhället. Tabeller, diagram och aritmetiska beräkningar med olika lägesmått är vanligt förekommande både i media och samhällskontext. Dagligen tolkas diagram för medeltemperatur i relation till miljöpåverkan. Det genomförs beräkningar av diagram där olika variablers påverkan för lägesmått (korrelationer) presenteras för att synliggöra troliga effekter för att bli sjuk i en pandemi. Den här typen av dagliga matematiska situationer erbjuder många möjligheter att bidra till ökad upplevelse och att utforska statistik genom representativa uppgifter. Det är även en avgörande förståelse att kunna överväga olika lägesmått användbarhet, exempelvis medelvärde, som representativ för olika uppgifters informationsvärde för medborgare (MacCullough, 2007). Den möjlighet som samhället kan bidra med inom detta område kan jämföras med kontextualiserade uppgifter som anses engagera och öka motivationen för konceptuell kunskap (Sullivan & Field, 2013). Cobb och Moore (1997) hävdar att kritiskt för statistisk förståelse är att ”datamängder” som presenteras ska vara kontextualiserad, alltså i dess sammanhang. Det för att “statistics requires a different kind of thinking, because data are not just numbers, they are numbers with a context” (a.a. s. 801). Professionsutbildning inom utbildning för statistiskt innehåll förespråkas att synliggöra siffrorna som utgör data i dess sammanhang. Men samtidigt är det vanligt förekommande i matematikböcker att uppgifter inom detta område presenteras som dekontextualiserade siffror (Liljekvist, 2014). Utvecklad förståelse av medelvärde inkluderar både algoritmisk förståelse för beräkning av medelvärde (procedurell kunskap) som aritmetisk förståelse för medelvärdet som en genomsnittlig matematisk balanspunkt av värden (konceptuell kunskap) (MacCullough, 2007). Det innebär att det ska finnas en balans mellan att bara genomföra beräkningar av medelvärdesalgoritmen och statistiskt resonemang för att utveckla förståelse för begreppet. Därför bör statistikuppgifter utgå från ett sammanhang som främjar statistiskt resonemang (Cobb & Moore, 1997), och för att utveckla konceptuell kunskap krävs att algoritmen är relaterad till ett sammanhang (MacCullough, 2007). Eleverna måste också erbjudas möjligheten att föra sina resonemang för att skapa matematisk förståelse för uppgifter inom lägesmått (Maker, 2014), för att kunna distansera sig från data och själva klassrumskontexten. Rossman (2008) påpekar skillnader mellan matematik och statistiska slutsatser i att de två disciplinerna involverar olika typer av resonemang och förståelse. I deras studie framträder att elever reagerar

olika avseende lärande i matematik och inom statistik. Det innebär att lärare behöver utveckla undervisningsmetoder specifikt för att undervisa inom statistik. Elever förväntas utveckla förståelse för att analysera data som ofta utgörs av olika representationer (Duvall, 2006) och kan uppfattas som rörigt. Eleven ska dessutom avgöra om antaganden är rimliga utifrån en variation av data när de löser problem inom statistik. Inom statistik förväntas eleverna resonera om valda statistiska representationer om dessa utgör den bästa uttrycksformen att representera och visualisera insamlade data. Detta resonerande skiljer sig från andra domäner inom matematikundervisningen. Det innebär att lärare måste ha kunskaper om att resonemang inom statistik skiljer sig från andra matematiska resonemang (Garfield m.fl., 2008). Inom lärarutbildning baseras ofta det matematiska innehållet på representationer (Hemmis & Ryve, 2015). Det innebär att inom den statistiska domänen räcker det inte med enbart representationer som uttrycker det matematiska innehållet på samma sätt, utan studenterna måste även kunna resonera utifrån olika representationers giltighet för insamlade data. Lärarstudenter behöver dessutom utveckla kunskaper i hur elever utvecklar kunnande genom att resonera om statistiska sammanhang.

3.3.3 Två- och tredimensionella geometriska objekt

I den fjärde professionsutvecklande studien i den här avhandlingen identifieras lärarnas medvetenhet och förståelse för elevernas rumsliga förmåga i tidig matematisk utbildning. Det är betydelsefullt att läraren förstår hur ämnesinnehållet ska undervisas, samt länkar undervisningen till vardagliga sammanhang (Ball & Cohen, 1999). Enbart teoretisk förståelse av ämnet bidrar inte till konceptuell undervisningsförståelse (Ball & Cohen, 1999). Konceptuell undervisningsförståelse bygger på en förståelse för behovet av att erbjuda eleverna fler representationer som exempelvis konstkonstruktioner eller jämförelse med andra ämnen och dess sammanhang, vilket ökar sannolikheten för mer djup förståelse för helheten i geometriämnet (Smith, 2001). Det finns dock få studier om undervisning i geometri som fokuserar på att utveckla elevers rumsliga förmåga i grundskolan. Därför syftade studie fyra i den här avhandlingen till att bidra med mer forskning av lärares professionsutveckling för att utveckla sin undervisning avseende detta innehåll.

Geometriinnehållet i matematik bidrar till att utveckla elevernas rumsliga och logiska resonemang (French, 2004). Rumslig förmåga är avgö-

rande för att utveckla förståelse för och uppleva den visuella världen korrekt (Gardner 1993). Den anses indelad i tre områden; rumsliga relationer, visualisering och orientering (Thurstone, 1950). Rumsliga relationer består av att föreställa sig rotationerna av två- och tredimensionella objekt som en hel kropp (Olkun, 2003). Rumslig visualisering består av förmågan att föreställa sig att representera två- och tredimensionella rörelser i olika utrymmen (Clements & Battista, 1992). Rumslig orientering är förmågan att skilja geometriska former från olika positioner (Thurstone, 1950) men också att föreställa sig två- och tredimensionella objekt baserade på olika rotationer (Maier, 1996). Det bidrar till en mental rumslig förståelse både i vertikal som horisontell riktning.

Van Hiele (1986) har identifierat fem nivåer av mental rumslig förståelseutveckling. Den fjärde studien behandlade nivå 1 det vill säga att uttrycka sitt lärande beträffande två- och tredimensionella objekt (cirkel, kvadrat, rektangel, triangel, sfär, kub, kon och rätblock). Undervisning av geometriskt innehåll är nära relaterat till förmågan att urskilja visuella representationer i olika former (jämför med Bishops 1988 användning av begreppet designa som matematisk aktivitet). Flera repetitioner av representationer krävs för att utveckla djupare matematisk kunskap (Duval, 2006). Emellertid visade Wilson och Swanson (2001) att elever som har svårigheter i matematikundervisningen verkar ha svårare att bevara visuella representationer i arbetsminnet jämfört med andra elever. Seago m.fl. (2013) har däremot visat att i geometriundervisning, där representationer utgör stöd för att visualisera kongruent förståelse (likheter) mellan objekt utvecklas djupare förståelse för förstoring och förminskning av objekt (exempelvis skalor 1:3, 3:1)

Från 11–12-årsåldern övergår eleverna från konkreta operationer till mer formella (Piaget, 1972). Det innebär att de utvecklar en förståelse för relationerna mellan olika objekt, såsom två- och tredimensionella objekt, utan att förlita sig på konkreta exempel (a.a.). Det är dock inte enkelt att bygga formell matematisk kunskap i unga åldrar eftersom eleverna behöver utveckla abstrakt tänkande (Piaget, 1972). Hallowell m.fl. (2015) belyste till exempel i sin studie hur elever i grundskolan uppvisade svårigheter att transformera sin kunskap mellan uppgifter, när kurvor var inblandade. Det i sig blir betydelsefullt vid undervisning av två- och tredimensionella objekt för att urskilja likheter och skillnader mellan exempelvis cirkel och sfär/kon. Även inom geometriundervisningen utgör geometri en specifik

domän inom matematikundervisningen. Eftersom det är vanligt förekommande att vi mäter olika geometriska objekts areor och volymer kan det bidra till att även geometri förväntas undervisas liknande ”mäta” som i kvantiteter. Det är dock olika domänspecifika områden och kräver därmed domänspecifika matematikundervisningsmetoder. Eftersom mäta oftast är i relation till att mäta kvantiteter innebär det att undervisning och elevers utvecklade förståelse går hand i hand med utvecklad taluppfattning. Det innebär en mer linjär progression av utvecklad förståelse inom mäta (van den Heuvel-Panhuizen m.fl., 2008). Inom geometri är det däremot inte lika linjärt i förhållande till hur elever utvecklar sin förståelse för rummet och dess egenskaper (a.a.), där två- och tredimensionella objekt utgör ett betydande inslag. Barnets utforskande av rummet innebär att det intar olika positioner och det gör det svårare att urskilja en linjär progression avseende vilka egenskaper som urskiljs först (a.a.). Barnet behöver många erfarenheter av rummet och objektens egenskaper. Det innebär att matematiklärare behöver utveckla förståelse inom geometriundervisning i förhållande till hur rummets och objekts egenskaper förhåller sig till varandra. Matematiklärare behöver också utveckla kunskaper om hur den lärande utvecklar kunskaper om detta förhållande. Till skillnad mot att enbart fokusera på den stegvisa inläringen hos den lärande behöver läraren fokusera på den lärandes möjligheter att lära inom detta matematiska område. Geometriområdet, mer specifikt förståelse om rummet, är inte framträdande inom den tidiga matematikundervisningen (Clements & Sarama, 2011). Det innebär att det behövs fler studier i hur lärare utvecklar förståelse om detta.

4 TEORETISK INRAMNING

I det här kapitlet redogörs för det teoretiska perspektiv som används i analysförfarandet i föreliggande avhandling. Variationsteorin syftar till att studera sambandet mellan undervisning och lärande. Perspektivet studerar hur ett undervisningsinnehåll erbjuds den lärande att urskilja, gällande likheter och skillnader avseende de aspekter som innehållet består av. Det har med stöd av variationsteorins antaganden studerats i tre av de fyra olika utbildningssammanhangen samt i den övergripande syntesen av studierna.

4.1 Variationsteoretiska utgångspunkter

Variationsteorin är en teori som utgår från att allt lärande kräver samtidig variation av ett lärandeinnehålls aspekter för att kunna urskiljas av den lärande (Marton, 2015). Från ett variationsteoretiskt perspektiv innebär att lära att erfara, uppleva, förstå, uppfatta eller se något på ett kvalitativt mer utvecklat sätt (Marton, 1981; Marton & Booth, 1997). Inom variationsteorin är lärandets syfte alltid riktat mot något, lärandets innehåll eller lärandeobjekt (Marton m.fl., 2004). För att förstå lärande, särskilt vad som är avgörande för lärandet är det nödvändigt att ta hänsyn till vad som faktiskt lärs och inte endast vad som erbjuds att lära (a.a.).

Inom den empiriska forskningstraditionen utgör variationsteorin en ram för att både förstå lärandeobjektet och hur man lär sig detsamma (Lo, 2012; Marton & Tsui, 2004). Elevernans perspektiv anses vara ytterst viktiga inom denna teori, som grundar sig i fenomenografins antaganden om andra ordningens perspektiv. Andra ordningens perspektiv studerar och beskriver personers erfarna variation av att se, uppleva, erfara och förstå världen till skillnad från första ordningen som innebär att fundera över världen och hur den är beskaffad (Marton, 1981). För att studera ur ett andra ordningens

perspektiv är det viktigt att ställa frågor som vad det betyder att utveckla förståelse på ett visst sätt, hur erfarenhet av förståelse har utvecklats, samt kvalitativa skillnader mellan två sätt att undervisa om samma innehåll för att studera vilket lärande som blir möjligt. Grundläggande inom den fenomenografiska ansatsen är en icke-dualistisk syn på mänskligt lärande i den mån att det visar erfarenhet som ett internt förhållande mellan människor och världen, det vill säga att det inte är möjligt att separera den lärande från det som lärs.

Variationsteorin kan bidra med att utveckla kunskap om och för lärare i hur ett innehåll kan fokuseras pedagogiskt utifrån elevernas förståelse (Marton, 2015). Den bidrar även till unika möjligheter att studera, utveckla och konstruera en praktik där lärarens pedagogical content knowledge sammanflätas med barns perspektiv (Björklund & Barendregt, 2016). Variationsteorin kan utgöra ett teoretiskt verktyg för lärare som förklarar hur en undervisning kan designas och utvecklas i relation till elevgruppen. Variationsteorins antaganden kan därmed utgöra bestående verktyg för lärares professionsutvecklande undervisning vid deltagande i exempelvis Learning study eftersom dessa antaganden baseras på aspekter för hur innehållet kan behandlas och förstås (Holmqvist, 2011). Hur verktygen används och framträder är dock beroende av kulturen och kan inte förstås utan den sociala praktiken som exempelvis undervisning, gruppsamtal eller professionsutveckling. Deltagande i en social aktivitet, som exempelvis kollaborativ professionsutveckling, utvecklar förståelse av undervisningsdesignens relation till barnets/elevens lärande.

Variationsteorin baseras på begreppen urskiljning, simultanitet och variation (Marton & Booth, 1997). De tre begreppen är sammanflätade och måste vara närvarande i varje inlärningsituation för att ett lärande ska utvecklas (Holmqvist, 2006; Holmqvist et al, 2008; Lo 2012; Marton & Booth 1997; Runesson 1999; 2006). Inom variationsteorin är skillnaderna i vilka aspekter som uppfattas samtidigt betydande för lärande (Pang, 2003). För att uppleva eller förstå något på ett visst sätt måste vissa aspekter, delar av ett fenomen, uppfattas samtidigt. Det är uppfattningen av dessa aspekter som har avgörande betydelse för lärandet (a.a.). Att urskilja en sak kräver erfarenhet av variation (vad saken är och vad den inte är) och medvetenhet om fenomenets definierade egenskaper (aspekter). Det är variationen som leder till urskiljning. Simultanitet innebär att olika aspekter urskiljs samtidigt och sätts samman till en helhet.

4.1.1. Lärandeobjekt

Ett lärandeobjekt är det avgränsade innehåll som undervisningen syftar till att utveckla kunskap om hos eleven. Det direkta lärandeobjektet fokuserar på det konkreta innehållet, till exempel hur en mening är uppbyggd, medan det indirekta syftar till den generiska förmåga (att skriva) som utvecklas parallellt. Marton och Pong (2005) beskriver lärandeobjektet utifrån olika nivåer; det intentionella eller planerade (intended object of learning), det iscensatta (enacted object of learning), och erfarna (the lived object of learning). Det erfarna lärandeobjektet (lived object of learning) utgörs av elevernas kunskaper om lärandeobjektet före och efter kursinslag som i en Learning study kartläggs genom ett förtest, det vill säga den kunskap eleven har. Det intentionella lärandeobjektet (the intended object of learning) avser det som ur lärarens perspektiv eleven förväntas utveckla kunnande om, lärarens intentioner. Det iscensatta lärandeobjektet (the enacted object of learning) beskriver det som eleverna erbjuds att lära under lektionen. Det är genom att beskriva hur innehållet kan förstås i de tre nivåerna, det intentionella, iscensatta och det erfarna lärandeobjektet, som det går att urskilja vad det är som är avgörande för det som eleverna lär i relation till vad de erbjuds att lära.

4.1.2 Aspekter av innehåll

Enligt variationsteoretiska antaganden består alla innehåll av aspekter, delar av den helhet som konstituerar lärandeobjektet. Aspekter kan vara en del av en helhet, och denna helhet kan i sin tur vara en aspekt i en större helhet. Marton och Booth (1997) benämner den yttre horisonten som den strukturella aspekten, hur lärandeobjektet är strukturerat. Den inre horisonten avser delarna och deras relationer till varandra i den helhet som avgränsar lärandeobjektet. Alla aspekter kan dock inte uppfattas och urskiljas samtidigt. Dessutom urskiljer människor aspekter olika och därmed erfär samma fenomen olika, beroende på vilken förförståelse eller tidigare erfarenhet de har. Att veta vad något är kräver samtidigt att förstå vad det inte är, det vill säga på vilket sätt innehållets aspekter skiljer sig från andra innehålls aspekter. "Knowing what something is implies knowing what it is not." (Runesson, 2005 s. 4).

Ur en pedagogisk synvinkel är kritiska aspekter de aspekter som den lärande ännu inte urskilt, men måste urskilja för att utveckla sin förståelse av ett lärandeobjekt. Marton och Pang (2006) visar att hur lärare organiserar

lärande inte innebär skillnad för lärandet, det vill säga vilka metoder som erbjuds, till exempel grupparbete eller helklassundervisning. Det är i hur läraren väljer att behandla eller rikta uppmärksamheten för lärande mot specifika aspekter av utvalt lärandeobjekt som gör skillnad, för vad som blir möjligt för eleven att lära.

4.1.3. Likheter och skillnader

Att se skillnaderna i lärande som en skillnad i förmågan att urskilja aspekter innebär dock inte bara ett tillägg i lärandet av de urskilda aspekterna. Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv är lärande en fråga om att kunna urskilja och differentiera de aspekter som konstituerar ett utvalt lärandeobjekt. Det är således genom utökad förståelse av vad som är kritiskt att urskilja som ökar kunskap och förutsättningar för lärande i förhållande till målen. Gibson och Gibson (1955) pekar just på vikten av att differentiera för att belysa lärandet med utgångspunkt i att uppfattningen blir rikare genom *olika* svar. Således blir lärande en fråga om att kunna skilja på skillnaderna och hitta samband mellan det som är väsentligt för att förstå något specifikt. Vad som urskiljs kan ändras, till exempel att vi upptäcker buller eller ljud från ett ventilationssystem som vi har utsatts för hela dagen, uppfattas först när det stängs av (Emanuelsson, 2001). När bruset av trumman uppfattas mot bakgrund av tystnad uppfattas en dimension av variation (Runesson, 2006). Invariants utgör den bakgrund av konstanta aspekter som övriga aspekter varierar mot och därmed urskiljs (Marton & Pang, 2006).

Ett mönster med variation och invariants (icke variation) skapar ett utrymme för lärande (Ljung-Djärf & Holmqvist Olander, 2013). Lärande-rymten är inte situationen i sig. Att vistas i ett rum med bruset från ventilationen innebär inte med automatik att alla uppfattar ljudet från ventilationen. Det är snarare genom att erbjuda ett mönster, som utgår från variation och invariants samtidigt, som öppnar upp potential för att urskilja objektet i situationen (a.a.). Det innebär att om ventilationen hade stängts av, och sedan satts på igen så hade skillnaderna gjort att omgivningen uppmärksammat ljudet. Det innebär att enbart fokusera på rektanglar i ett matematiksal inte bidrar till urskiljning av objektets specifika egenskaper. För att få syn på dessa behöver eleven se vad som inte är specifikt för rektanglar, det vill säga vad som skiljer en rektangel från till exempel

en cirkel. Genom variation där objektets egenskaper hålls konstanta gentemot ett annat objekt samtidigt, urskiljer eleverna de aspekter som är specifika för just en rektangel.

4.1.4. Variationsmönster

Vilka likheter och skillnader som eleven kan urskilja, och vilka aspekter som blir möjliga att erfara, bildar olika mönster som iscensätts i undervisningen. Det finns tre olika variationsmönster som anges inom det variationsteoretiska ramverket; kontrast (för att veta vad något är behöver man veta vad det inte är), generalisering (för att förstå det specifika behöver man uppleva det på olika sätt för att kunna separera från det representativa), fusion (två eller flera aspekter som tidigare urskilts separat varieras samtidigt) (Kullberg m.fl., 2017; Lo, 2012; Marton, 2015). Kontraster används för att särskilja aspekter av ett fenomen såsom samtidig kontrast mellan olika geometriska objekt för att urskilja exempelvis en cirkel genom att jämföra med en kvadrat och triangel. Traditionellt visar lärare ofta många exempel på samma sak. Det är vanligt att elever uppmanas att ge sig ut på geometrijakt där eleverna till exempel uppmanas att samla på sig så många rektanglar de kan. Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv är det snarare skillnaderna genom att samtidigt kontrastera en rektangel och en cirkel som erbjuder eleverna urskiljning. Generalisering däremot, kräver att eleven ser flera olika former av trianglar för att generalisera de aspekter som gör att de förstår vad en triangel är och därmed kan känna igen en triangel även om de inte sett just den triangeln tidigare. Fusion innebär att eleven klarar av att urskilja vad som är en triangel, kvadrat och cirkel där flera olika representationer av samtliga formers aspekter urskiljs samtidigt.

Utifrån variationsteoretiska principer har delar av avhandlingens studier designats, och även den syntetiserande analysen av studiernas resultat är inspirerad av variationsteoretiska antaganden.

5 METODOLOGI

I kapitlet redogörs för forskningsdesign och insamlad empiri i relation till kappans ställda forskningsfråga. Därpå följer ett avsnitt om vald praktikutvecklande forskningsansats, tillvägagångssätt, urval och deltagande, samt analys. Avslutningsvis behandlas trovärdighet, generaliserbarhet och forskningsetik.

5.1 Forskningsdesign

I kappan har en syntes av de ingående studiernas resultat gjorts. Studiernas design (1-4) utgår både från kvalitativa och kvantitativa metoder. Utgångspunkt att kombinera metoder innebär att data genereras på två olika sätt. Genom att använda såväl kvalitativa som kvantitativa data bidrar analysen till att ge en rikare bild av situationen, samtidigt som resultat kan befästras genom flera olika empiriskt insamlade data (Creswell, 2014). Denna forskningsdesign är användbar när forskningsfrågor av mer komplex karaktär ställs, med flera olika variabler som studeras liknande det som förekommer i denna avhandling.

Inom de praktikutvecklande modellerna som använts i avhandlingen, Learning study och Lesson study (PBPD), renderas både kvalitativa och kvantitativa data. Kunskapsmätningar i form av för- och eftertest bidrar tillsammans med data renderade från kollaborativa samtal, gruppdiskussioner, lektionsobservationer och skriftliga noteringar till analysen. Dessa resultat utgör indikatorer för att belysa om lärares professionsutbildning lett till förändring avseende undervisningens kvalitet.

Avhandlingens övergripande analys följer en progressionslogik. Detta resulterar i att respektive resultat från de fyra studierna leder till den avslutande

analysen där studiernas resultat sammanställs i en syntes. I den här avhandlingen innebär det att de fyra första stegen analyseras var för sig, i respektive studie, för att därefter bistå analysen i det femte steget. Olika analysmetoder har använts i de olika stegen. Steg 1 utgörs av en blandning av kvantitativa och kvalitativa (KVANT och KVAL) metoder. Nästa efterföljande steg 2 består enbart av kvalitativa (KVAL) metoder. I steg 3 utgörs metoderna återigen av en blandning mellan kvantitativa och kvalitativa metoder (KVANT och KVAL). Det fjärde steget består av mestadels kvalitativa metoder med visst inslag av kvantitativa (kvant och KVAL). I figuren nedan presenteras en översikt över avhandlingens forskningsdesign i hur de fyra första stegen utgör en grund för det efterföljande femte steget i analysen (se figur 1). Versala bokstäver betecknar huvudsaklig analysmetod, medan gemena bokstäver, betecknar den underordnade analysmetoden.

Figur 1

En översikt över avhandlingens forskningsdesign (versaler=huvudsaklig analys, gemener=underordnad analys)

Det som skiljer denna avhandlings Lesson study (studie 4) och Learning study (studie 3) från hur de vanligtvis genomförs är att eleverna inte är skolelever, utan blivande respektive verksamma lärare, och lärarna är lärarutbildare. I övrigt har modellerna använts på samma sätt som i skolan, vilket beskrivs längre fram för respektive studie.

5.2 Syntes

Avhandlingens syfte är att studera hur kollaborativ undervisningsutvecklande professionsutbildning kan utveckla blivande och verksamma lärares syn på och förståelse för yngre elevers lärande i matematik, samt undervisningens betydelse för att stödja deras lärande. Kappans övergripande frågeställning riktas mot att studera vilka inslag i professionsutveckling för blivande och verksamma lärare i matematik som bidrar till att de utvecklar en förändrad syn på och förståelse för elevers kunnande och lärande genom matematikundervisning.

För att besvara kappans övergripande forskningsfråga genomförs en syntetisering av de ingående fyra studierna i avhandlingen, där en variationsteoretisk, deskriptiv analys med de fyra studiernas resultat som grund, bidrar till

att urskilja de aspekter som är avgörande för lärarnas utveckling. Det sker genom att lärandeobjektets behandling studeras i respektive studie, dels avseende den undervisning som erbjuds lärarna/lärarstudenterna. Lärandeobjektet i undervisningen av blivande och verksamma lärare (och därmed fokus för lärarutbildarna) är professionsutveckling. I den övergripande analysen studeras likheter och skillnader avseende vilka aspekter som urskilts som betydelsefulla för att lärarstudenter, lärarutbildare och yrkesverksamma lärare får möjlighet att utveckla en förändrad syn på och förståelse för elevers kunnande och lärande genom matematikundervisning.

Det innebär en beskrivning av de aspekter som framträder som avgörande för att utveckla lärares förståelse av vilket matematikkunnande undervisningen erbjuder barn och elever att utveckla. Genom att analysera varje studie för sig, har en analys genomförts i relation till respektive syfte och frågeställningar (beskrivs utförligt i respektive artikel) som därefter har syntetiserats. Med utgångspunkt i variationsteorin har aspekter som framträder i det intentionella och iscensatta lärandeobjekt tolkats deskriptivt i respektive studie. Syntesen har därefter genomförts för att relatera de olika kontexterna till varandra avseende vilka aspekter som framträder som avgörande, i syfte att hitta likheter och skillnader, i vilka inslag i professionsutveckling för blivande och verksamma lärare i matematik som bidrar till att de utvecklar en förändrad syn på och förståelse för elevers kunnande och lärande genom matematikundervisning. I denna fas framträder aspekter i respektive kontexter (förskola och skola) i relation till former av matematikkunnande (procedurell och konceptuell). Det innebär att likheter och skillnader kan belysas mellan de respektive kontexterna förskola och skola, samt dimensionerna lärarutbildning och lärarfortbildning, vilket förklaras i figur 2 nedan.

Figur 2
Studiernas praxisgemenskap i analysförfarandet

	Förskola	Grundskola
Lärarutbildning	Studie 1	Studie 3
Lärarfortbildning	Studie 2	Studie 4

Syntesen har en abduktiv ansats (Sköldberg & Alvesson, 2017) där likheter och skillnader utifrån det teoretiska ramverket relateras till den empiri som genererats i respektive studie.

5.3 Forskningsdesign i studierna

Avhandlingens första studie undersökte hur videor med didaktiska inslag kan användas av lärarutbildare för att identifiera förskollärlärostudenters förmåga att känna igen barns utforskande av matematik i förskolan. Ett test konstruerades och användes vid tre mättillfällen under genomförande av en obligatorisk matematikkurs inom förskolläroprogrammet. Testet bestod av elva videodokumenterade lärotillfällen i förskolan med didaktiska inslag. Dessa lärotillfällen var både organiserade och spontana som yrkesverksamma förskollärare dokumenterat i sin verksamhet baserat på Bishops (1988) sex matematiska aktiviteter. Testet konstruerades av mig som forskare. Valet grundades på Shulmans (1986) rekommendation att utgå från fallstudier för att förbättra lärares lärandekunskap och Ball och Cohens (1999) samt Lo m.fl. (2005) rekommendationer att utgå från verkliga situationer i praktiken. Vidare valdes sammanhang i förskolan som lärostudenterna troligtvis inte förknippar med matematiska aktiviteter för att lärostudenterna skulle utmanas till att upptäcka möjligt matematiklärande i olika barnaktiviteter (Rowland m.fl., 2014). I matematikkursen ingick föreläsningar, workshops och praktikförlagda dagar, så kallade fält-dagar. Det matematiska innehållet och undervisning om detsamma i förskolan fördjupades och diskuterades tillsammans med lärarutbildare under kollaborativa lärandeformer med grupper av lärostudenter inom kursens ram. Baserat på variationsteorin (Marton & Pang, 2005) syftade analysen till att studera förskollärostudenternas uttryckta förmåga att identifiera intentionellt lärandeobjekt gällande barns utforskande av matematiskt innehåll före, under och efter kursen. Analysenheten bestod av utsagor från de studenter som valde att skriftligt svara under det visade testet. De fick se samma test före, under och två veckor efter kursen.

Avhandlingens övriga tre studier (studie två, tre och fyra) baseras på praktikutvecklande forskningsansatser, genom en kombination av professionsutveckling och forskning (Holmquist & Mattisson, 2008; Stiegler & Hiebert, 2016). Det innebär att den andra och fjärde studien har inspirerats av Lesson study (Lewis, 2002; Elliott 2012) medan den tredje studien har använt Learning study som ansats (Pang & Lo, 2012; Pang & Marton, 2003). I respektive studie fokuseras ett gemensamt lärandeobjekt, valt av de deltagande lärarutbildarna. Valet av forskningsansats har grundats på intentionen att urskilja vilket matematiklärande som framträder, och vilken

förståelse för detta som utvecklas under den undervisningsutvecklande insatsen. Genom de båda forskningsansatserna renderas data utifrån upprepade cykler som ger rika möjligheter att fånga lärandeobjektets behandling i undervisningen. Valet grundade sig även på att tidigare studier har lyft fram dessa ansatser i förhållande till både utvecklande av pedagogiskt innehåll (Björklund & Barendregt, 2016) och pedagogiskt ämnesinnehåll (mathematical pedagogical content knowledge) specifikt för matematiklärare (Holmqvist, 2017). De båda modellerna Lesson study och Learning study konkretiserar dessutom hur undervisningsdesignen påverkar barns och elevers lärande (Pang & Lo, 2012).

I den andra studien studerades förskollärares urskiljning av barns matematiska kunskapsutveckling under lekaktiviteter i förskolan och förskollärarnas möjligheter att urskilja barnens matematiska kunnande. Studien fokuserar på förskollärarnas förmåga att utveckla barns lärande med utgångspunkt i de egendokumenterade matematikaktiviteter i fria leksituationer. Det innebär att studien studerar undervisningsutvecklande professionsutveckling med utgångspunkt i det kollaborativa lärandet. De egendokumenterade matematikaktiviteterna blir betydelsefulla utifrån att det är förskollärarna som observerat och valt ut lärotillfällena, till skillnad mot att jag som forskare eller lärarutbildare hade studerat barnens utforskande av matematik i förskolan. Analysenheten bestod av två utvalda egendokumenterade lärsituationer av två deltagande förskollärare. Dessa videodokumentationer reflekterades under kollaborativt lärande i form av samtal mellan åtta förskollärare. Samtliga deltagare hade valt att fokusera på matematiska lärotillfällen i relation till Bishops (1988) matematiska aktivitet leka. I analysförfarandet användes variationsteoretiska antaganden. Analysen styrdes av teorins antaganden om att lärande innebär en kvalitativt utvecklad förmåga att urskilja aspekter av fenomenet som inte tidigare har identifierats (Holmqvist & Selin, 2019), vilket i den här studien utgjordes av matematiska aspekter i aktiviteten leka.

Den tredje studien utgjordes av en Learning study som genomfördes av lärarutbildare och studerade lärarstudenters utvecklade kompetens att utforska årskurs 6 elevers kunskaper avseende området medelvärde (statistik). Ett för- och eftertest konstruerades av lärarutbildarna och forskare, som erbjöd summativa och formativa bedömningsmöjligheter. Den första delen av testet baserades på observationer och reflektioner av videoinspelade enskilda elevers uttryckta redovisningar av lösningar. De skriftliga

lösningarna visades samtidigt som eleverna i den inspelade videon muntligt redogjorde för hur de löst matematikuppgifter om medelvärde. Därefter visades en videoinspelning av hur samma elever, fem till antalet, resonerade tillsammans med lärare om de olika lösningsförslagen som de åstadkommit. Uppgiften som eleverna i testet löste och redogjorde för var hämtad från PRIM-gruppens exempelsamling för nationella prov i årskurs 6 inom statistik, gällande medelvärde. Lärarstudenterna analyserade materialet med uppgift att bedöma vilket kunnande eleverna uppvisade såväl före som efter deltagande i forskarlektionen. Lärarstudenternas analys utgjorde studiens för- och eftertest. För att bidra med ny kunskap om förhållandet mellan lärarstudenters innehållskunskap och deras förmåga att förstå elevernas innehållskunskap ur ett didaktiskt perspektiv, genomfördes denna studie med lärarstudenter som analyserade elevernas resonemang om medelvärde. Totalt genomfördes fem forskningslektioner, vardera en i fem olika lärarstudentgrupper från grundläroprogrammet 4–6. Totalt deltog 64 lärarstudenter i de fem olika grupperna, samt ett forskarteam bestående av forskare och lärarutbildare.

Den fjärde studien syftade till att bidra med kunskap om hur lärares medvetenhet och förståelse för nödvändiga förutsättningar för att förbättra elevernas förmåga att urskilja två- och tredimensionella geometriska objekt utvecklades. Konstruktionen av de kollaborativa möjligheterna som erbjudits har sin utgångspunkt i en Lesson study-ansats (Lewis, 2002, 2009, 2016; Stigler & Hiebert, 1999; Takahashi & McDougal, 2016). I den här studien deltog tre lärare som hade uttryckt önskemål om att utveckla sin matematikundervisning avseende lärandeobjektet två- och tredimensionella objekt med utgångspunkt både i matematikämnets och bildämnets kursplaner. Lärarna som ingår i studien är inte legitimerade matematiklärare, däremot är en deltagare legitimerad bildlärare för årskurs 1-9. Studien genomfördes i en årskurs 4 med 14 elever och ingår i ett större professionsutvecklande projekt vid den aktuella skolan, där fler forskare ingått i andra delar av projektet.

5.3.1 Urval och informanter i studierna

Urval av respondenter har skett utifrån önskemål och bekvämlighet, men samtliga studier inkluderar blivande eller verksamma lärare som genomgår någon form av utbildningsinsats för undervisningsutveckling. En sammanställning av urvalet presenteras i Tabell 1, nedan.

Tabell 1

Urval och informanter i respektive studie

Studie	Urval	Informanter
1	Förskolläraryrkesutbildning, matematikkurs inom ordinarie program med matematikinnehållet matematiska aktiviteter (Bishop, 1988)	Förskolläraryrkesstudenter
2	Kommunal kompetensutvecklingsinsats baserad på det matematiska innehållet Bishops matematiska aktivitet leka (1988).	Yrkesverksamma förskollärare
3	Grundläraryrkesutbildning 4-6, matematikkurs inom ordinarie program baserad på matematikinnehållet medelvärde.	Grundläraryrkesstudenter med fördjupningsämne svenska, SO/NO eller matematik.
4	En del av ett större skolutvecklingsprogram. Det matematiska innehållet baseras på två- och tredimensionella geometriska objekt.	Yrkesverksamma lärare i årskurs 4 som undervisar i matematik och bild.

5.4 Insamling av data i studierna

Data har samlats in vid undervisningstillfällen i läraryrkesutbildning och lärarfortbildning som skett i de ingående studierna. Det innebär att data samlats in i blivande och verksamma lärares naturliga kontexter för professionsutbildning. Vid samtliga tillfällen har data renderats tillsammans med blivande och verksamma lärare samt läraryrkesutbildare. I första studien har det bidragit till tre mättillfällen, före, under och efter kurs, av förskolläraryrkesstudenters utvecklade matematikkunnande. I andra studien har förskollärarnas egendokumenterade lekaktiviteter tillsammans med utsagor från de kollaborativa samtalsformerna bidragit till insamlade data. I nästföljande studie 3 har för- och eftertest i relation till intentionellt och iscensatt lärandeobjekt utgjort data. Slutligen, i studie 4, har kollaborativa samtal tillsammans med forskare, lärarnas lektionsdesign samt de deltagande lärarnas egenkonstruerade för- och eftertest bidragit till renderade data. Tabell 2 nedan visar i detalj vilken data som ligger till grund för analys i respektive studie.

Tabell 2
Översiktlig datainsamling

Steg	Forskningsfråga	Artikel	Data	Deltagare	Analysverktyg
1	På vilka sätt möjliggör videodokumenterade matematiska aktiviteter förskollärarstudenterna att uttrycka sina utvecklade kunskaper före, under och två veckor efter kursen? Vilka aspekter av barnens kunskaper identifieras av förskollärarstudenterna före, under och två veckor efter kursen?	1	Kvantitativ/Kvalitativ Metod. Datainsamling skriftliga reflektioner (n=143, 96, 119) utifrån konstruerade matematiska lärotilfällen i förskola före, mellan och efter de medverkat i utbildning. Datainsamling har skett vid tre mättilfällen.	Förskollärarstudenter inom förskollärarprogrammet	Variationsteorin
2	Vilka situationer definieras av lärare som fria leksituationer som främjar matematisk kunskapsutveckling? På vilket sätt uppfattar lärare barns förkunskap som stödjande eller begränsande för kunskapsutveckling?	2	Kvalitativ metod. Datainsamling består av data från respondenternas skriftliga reflektioner (n=8) av sin praktik samt utvalda videodokumentationer (n=2) av densamma. Datainsamling har skett vid ett tillfälle.	Förskollärare inom kommunal kompetensutvecklingsinsats.	Variationsteorin
3	Vilka aspekter av innehållskunskap uttrycker eleverna under en videoinspelad gruppdiskussion om medelvärde? Vilka aspekter av elevernas uttryckta kunskap uppfattas av lärarstudenten före och efter interventionen? Vilka skilnader, om några, kännetecknar lärarstudentens förståelse för elevernas kunskap före och efter interventionen?	3	Kvantitativ/Kvalitativ Intervention. Datainsamling består av data från respondenternas skriftliga och muntliga reflektioner (64) av videoinspelade matematiska lärotilfällen i skolan (n=16, 18, 8, 8, 14). Datainsamling har skett vid två tillfällen: Före och efter de medverkat i undervisning med olika design, sammantaget fem forskningslektioner.	Lärarstudenter inom grundlärarprogrammet 4-6.	Variationsteorin

Steg	Forskningsfråga	Artikel	Data	Deltagare	Analysverktyg
4	<p>Vilka argument och antaganden styr lärares konstruktion av forskningslektionen?</p> <p>På vilket sätt, om något, förändras elevernas kunskap?</p> <p>Vilka nödvändiga förutsättningar, baserade på lärares medvetenhet och förståelse, krävs för att öka elevernas förmåga att urskilja skillnaderna mellan två- och tredimensionella objekt?</p>	4	<p>Kvalitativ Metod</p> <p>Datansamling består av data från transkriberade audioinspelade kollaborativa samtal (n=2) samt lektionsdesign (n=1) och konstruerat för- och eftertest (n=1).</p> <p>Datansamling har skett vid två tillfällen.</p>	Lärare inom grundskolan årskurs 4.	Kvalitativ analys
5	<p>Hur kan inslag i blivande och verk samma lärares utbildning bidra till att utveckla deras förståelse av hur matematikundervisning kan utformas för att utveckla barns och elevers matematiska kunskande?</p>	-	<p>Kvalitativ Metod</p> <p>Datansamling består av artikel 1-4.</p>	Samtliga ovan studie 1-4.	Variationsteorin

5.5 Analysarbete i studierna

Analysen i samtliga studier har startat i undervisningens kontext, där lärares reflektion av innehållets behandling och vilket matematikkunnande eleverna ger uttryck för analyseras utifrån de aspekter lärarna ger uttryck för. Därefter studerades det erfarna lärandeobjektet, det vill säga lärarnas urskiljning av elevernas matematikkunnande i relation till lärandeobjektets behandling. I de studier kvantitativa metoder används består dessa av data från konstruerade och genomförda kunskapstest i form av för- och eftertest av det lärande som lärarna utvecklat. Resultaten från dessa har bidragit till indikatorer av professionsutvecklingsinsatsens inverkan. Analysen baserades på variationsteoretiska antaganden i tre av studierna (1, 2 och 3). Utförligare beskrivning av analysen presenteras i respektive artikel. I den fjärde studien genomförs en kvalitativ analys som baseras på en kombination av professionsutveckling och forskning (Holmquist & Mattisson, 2008; Stiegler & Hiebert, 2016). De valda analysverktygen i respektive studie baserades dels på karaktären av data som samlades in, dels på vilka frågeställningar analysen skulle ge svar på.

5.5.1 Variationsteoretisk analys i respektive studie

Analysen i den första studien fokuserade på förskollärarstudenternas förmåga att identifiera barnens uttryckta matematiska kunskap i olika matematiska lärsituationer i förskolan, i relation till det intentionella lärandeobjektet som erbjöds barnen. Läraktiviteterna designades utifrån variationssteoretiska antaganden. Genom att designa två kontrasterande matematiska aktiviteter, erbjöds lärarstudenterna möjlighet att identifiera förändringar av barnens lärande. Identifiering av vilka aspekter av det intentionella lärandeobjektet (Holmqvist, 2006; Kullberg m.fl., 2017; Lo, 2012) som lärarstudenterna erfor under utforskande av barnens visade kunskaper i de elva matematiska lärotillfällena (videoklippen) analyserades. Att använda kontrastering för att möjliggöra analys av lärande grundade sig i tidigare studier om matematik i förskolan (Johansson, 2015; Svensson, 2017). Varje matematisk aktivitet videodokumenterades med utgångspunkt i möjligheten att urskilja räkne- och kvantitetsfärdigheter, vilket var det intentionella lärandeobjektet i professionsutvecklingsinsatsen. Analysen syftade vidare till att identifiera eventuella förändringar i studenternas svar genom

att fokusera på vilka aspekter de gav uttryck för i relation till det intentionella lärandeobjektet före och efter varje behandlat kursmoment. För att synliggöra de begrepp studenterna använde genomfördes en ordanalys, som visade i hur hög grad specifika ord användes relaterade till det intentionella lärandeobjektet. Vidare syftade den variationsteoretiska analysen till att identifiera skillnader mellan förskollärarstudentgrupperna avseende vilka aspekter de urskilde. Slutligen analyserades förskollärarstudenternas svar kvalitativt avseende deras urskiljning av det intentionella lärandeobjektet.

I den andra studien bestod lärandeobjektet av den matematiska aktiviteten lekas tre komponenter; modellera, abstrahera och hypotetiskt tänkande. Dessa komponenter utgör delar av helheten (leken som barnen är involverade i) samt sätts i relation till andra former av lek (generalisering). Begreppen invarians och variation bidrog till analysen, för att urskilja på vilket sätt aspekter av objekt eller handlingar varierade och urskildes ur en invariant bakgrund av förskollärarna.

I den tredje studien har variationsteoretiska antaganden använts av lärarutbildare för att förutsäga och utforma undervisning för lärarstudenter, samt av mig i analysen av vilka aspekter av lärandeobjektet som grundlärarstudenterna urskiljer före och efter interventionen i lärarprogrammet. Studien använder teoretiska antaganden om lärande för att förutsäga, testa och analysera förhållandet mellan undervisning och kunskapsutveckling. Analysen fokuserade på fyra olika kunskapsformer som framträdde i lärarstudenternas uttryckta förståelse: Procedurell (P), Procedurell Didaktisk (PD), Konceptuell (C) och Konceptuell Didaktisk (CD).

5.5.2 Kvalitativ analys

I den fjärde studien baserades analysen på en kvalitativ ansats, att förstå relationen mellan undervisning och lärande (Ball och Cohen, 1999). I denna studie används skolelevers resultat som indikatorer för att förstå huruvida lärarnas professionsutveckling också leder till kunskapsutveckling hos eleverna. Elevernas förändrade kunskaper om lärandeobjektet (två- och tredimensionella objekt) analyserades genom för- och eftertest. Utöver det analyserades lärarnas förmåga att utforma undervisning genom ljudinspelningarna som transkriberades och analyserades separat av båda forskarna för att öka giltigheten och trovärdigheten av analysen. Lärarnas uttryckta behov av förändringar i undervisningsdesignen, utifrån lärarnas

förståelse av elevernas kunskaper, har i analysen relaterats till elevernas uttryckta förståelse i testen.

5.6 Trovärdighet och generaliserbarhet

Det riktas kritik mot huruvida forskare, som genomför praktikutvecklande forskning, också ska kunna observera verksamheten på ett trovärdigt sätt samtidigt som de är en del av den (Newton och Burgess, 2008). Stenhouse (1981) avfärdar denna kritik eftersom han menar att forskare med utanför perspektiv är mer sårbart och därmed kan brista i förståelse av praktiken som gör att resultat misstolkas. Forskare som arbetar på ett sätt som innebär utökad närhet och involvering i verksamheten anses i det perspektivet utgöra mindre risk för att resultaten ska misstolkas.

5.6.1 Trovärdighet

Samarbete med lärare och forskare har i samtliga fyra studier bidragit till ökade möjligheter för deltagarreflektioner (Tracy, 2010). Lärare och forskare har med sina olika erfarenheter av den praktikgemensamma kontexten reflekterat över resultaten och dess inverkan på lärandet. De kritiska aspekterna har gemensamt diskuterats och reflekterats i förhållande till både lärandeobjekt och den grupp av lärande som studien utgått från. Det har varit betydande, som till exempel i den tredje studien, att tillsammans ta del av analysprocessen för att samplanera kring vilka kritiska aspekter nästa forskningslektion behöver belysa för att bidra till urskiljning av lärandeobjektet. I den fjärde studien var det betydelsefullt att lärare och forskare tillsammans reflekterade över elevernas uttryckta förbättrade resultat, eftersom det konstruerade för- och eftertestet inte fullt ut behandlade vad lärarna undervisade kring. Triangulering som metod blir därmed betydande för validering av samstämmighet av insamlat material för att öka trovärdigheten (Tracy, 2010). En triangulering både styrker samstämmigheten och bidrar till fler tolkningsmöjligheter genom användning av flera metoder, i det här fallet både från kvalitativa och kvantitativa. De iterativa processerna bidrog till att forskare och lärare gemensamt utformar och reflekterar över undervisningsdesign, elevuttalande och kunskapstest, vilket skapar en samstämmig tolkning. Detta var tydligt i den tredje studien. Samtidigt kan det, som i den fjärde studien, bidra till fler tolkningsmöjligheter

där samtalen i sig bidrar till ökad trovärdighet när dessa gemensamma reflektioner kan upptäcka brister i studien. I denna visade resultaten att konstruktionen av kunskapstest för eleverna var bristfällig då den inte innefattade allt det som lärarna hade för avsikt att lära eleverna.

I samtliga studier är tolkningarna förankrade i det empiriska underlaget. I den här avhandlingen har variationsteorin bidragit som analytiskt verktyg att synliggöra och validera undervisningens betydelse för lärandet i tre av de fyra studierna (Elliott, 2012). Valda metodologiska ansatser i respektive studie möjliggör social validitet genom den praktikgemenskap som samarbete mellan lärare och forskare erbjuder (Leko, 2014; Wolf, 1978), vilket ökar trovärdigheten i avhandlingen (Tracy, 2010).

5.6.2 Generaliserbarhet

En abduktiv ansats präglar avhandlingen genom att studier dels haft teoretiska antaganden som styrt fokus och design medan analyser av empiri, såväl kvantitativt som kvalitativt, haft induktiv karaktär. Genom att vandra mellan teori och empiri har resultaten växt fram succesivt i en abduktiv process (Alvesson & Sköldberg, 2017). En annan aspekt gällande generaliserbarhet inom kvalitativ forskning (a.a.) är huruvida resultaten är överförbara till andra sammanhang. I den här studien är det enbart den tredje studien som kan inbegripas i en generaliserbarhet som överförbar, eftersom den iterativa processen bidrog till att den utvecklade undervisningskontexten prövades i fem olika studentgrupper. Samtidigt bidrar resultat från fyra olika kontexter, i avhandlingens studier, till möjlighet att generalisera resultat som återkommer i alla studierna. Det har stärkts i föreliggande studie genom tydliga, detaljerade och innehållsrika beskrivningar, vilket är betydelsefullt för generaliserbarhet av kvalitativa forskningsresultat (Larsson, 2005). Utifrån de rika beskrivningarna får var och en därefter avgöra om resultaten är överförbara till egen praktik (Tracy, 2010).

Det är inte helt ovanligt att forskaren överskattar sina resultats betydelse (Vetenskapsrådet, 2017). Den här avhandlingens resultat kan inte på något sätt förklara den komplexitet som det innebär att förbättra undervisningskontexter för barns och elevers lärande genom lärares professionsutbildning, utan utgör snarare ett bidrag till det forskningslandskap som intresserar sig för undervisningsutvecklande professionsutbildning.

5.7 Forskningsetiska överväganden

I studierna med verksamma lärare, studie två och fyra, har jag som forskare lång erfarenhet av praktiken. I de båda studierna genomförda inom lärarutbildningen har jag däremot inte samma erfarenhet. I samtliga studier har jag varit en del av ett forskarteam som har bestått av antingen erfarna forskare, erfarna lärarutbildare, lärare eller samarbeten mellan flera kategorier. I stället för risker avseende utanförperspektiv, lyfter Stenhouse (1981) forskarens hängivenhet till en teori som en risk för praktikutvecklande forskning, det vill säga att teoretiska antaganden innebär att praktikens behov och situation inte uppmärksammas på ett bra sätt. Validitet inom praktikinära forskning, utifrån Vetenskapsrådets (2017) riktlinjer, främjas av att analyser och dess begränsningar redovisas öppet. I den här avhandlingen har det inneburet att samtliga data i varje studie har transkriberats och sammanställts för att därefter både urskilja och representera varierande mönster och uttalanden genom transparenta beskrivningar av tolkningarna. Tolkningarna har med stöd av teoretisk analytisk lins beskrivits utförligt och diskuterats såväl inom forskarteamet som med andra forskargrupper och lärarlag för att stärka validitet samt trovärdighet av studiernas slutsatser.

Föreliggande avhandlingsarbete följer Vetenskapsrådets (2017) etiska direktiv. Det rör till exempel frågor som under arbetets gång behöver behandlas som deltagares anonymitet, vad som ska beaktas vid framskrivande av resultat vid publicering och om själva hantverket i sig. Samtliga lärarstudenter (studie 1 och 3) och lärare (studie 2 och 4) är informerade om och har godkänt deltagande i respektive studier. Det har skett genom skriftliga och muntliga överenskommelser (se bilaga 1,2,3,4 och 5). Det som är betydelsefullt att belysa ur ett etiskt övervägande är att inget deltagande eller icke deltagande har inverkat på studenternas möjligheter att bli godkända inom kursen i lärarprogrammet. Samma gäller för de yrkesverksamma lärarna. De har själva valt att delta och själva som lärarlag valt lärandeobjektet. Ingen påverkan skedde varken från mig eller ledning eller andra inblandade av vilket valda lärandeobjekt som lärarna i respektive studie valde att samplanera kring. Samtliga har även informerats om att de när som helst kan avbryta sitt deltagande och begära att data som samlats in avseende deras medverkan ska förstöras.

Det är uppenbart att vissa grupper har erbjudits mer utvecklade undervisningsinsatser än andra, i takt med att lärarutbildarnas kompetens utveck-

lats. Datagenereringen är också något olika inom de fyra studierna. I grundlära­r­pro­gram­met godkände studenterna både insamling av skriftliga reflektioner, genomförda uppgifter samt videoinspelade samtal. I samma studie ingick fem forskningslektioner för att studera samband mellan lärande och undervisningsdesign. I förskollära­r­pro­gram­met godkände studenterna skriftliga reflektioner för insamling av empiri. Studien fokuserade inte specifikt på sambandet mellan undervisningsinnehåll och studenternas uttryckta kunnande. Det innebär att det inte finns samma rika material från förskollära­r­pro­gram­met som det finns från grundlära­r­pro­gram­met. I studien med deltagande lärare i årskurs 4 samlades enbart audioinspelade reflektioner in av deras gemensamma planering, samt ett konstruerat för- och eftertest. Från de yrkesverksamma förskollärarna samlades skriftliga reflektioner samt egendokumenterade verksamhetsnära videor in. Dessutom är det olika teoretiska ramverk inom den matematikdidaktiska forskningen som används. Trots det är varje datainsamling ändamålsenlig i relation till respektive studies syfte och frågeställningar (Alvesson & Sköldberg, 2017), eftersom olika former av professionsutbildning för lärare är avhandlingens fokus.

Forskningsresultat som påvisar vad som fungerar får inte begränsa deltagarnas möjligheter att använda sitt professionella omdöme om vad som är pedagogiskt önskvärt i olika situationer (Biesta, 2011). Den viktigaste frågan för professionella pedagoger handlar inte om effektiviteten i deras agerande utan om handlingarnas potentiella värde (Biesta, 2011). Lärarstudenterna och lärarna i respektive studier är medvetna om att de ingår i en studie och att deras handlingar observeras under respektive kursinslag. Det i sin tur kan påverka och innebära begränsningar främst i lärarstudenternas agerande och handlingar. Fokus i studierna är att synliggöra deltagarnas förståelse av innehållsrelaterade lärotillfällen. När jag som i den här studien både agerar handledare/läro­r­ut­bildare och forskare kan det leda till begränsningar i vad deltagarna väljer att dokumentera och diskutera under de organiserade kursinslagen. Det i sin tur innebär även överväganden om vad som ska finnas med i avhandlingen för att studien ska anses uppfylla kravet på trovärdighet (Larsson, 2005). Lärarstudenterna har godkänt och varit medvetna om att de deltar både i en obligatorisk matematikkurs (grundlära­r­pro­gram­met 4–6 och förskollära­r­pro­gram­met) och i en forskningsstudie. Likaså har samtliga läro­r­ut­bildare och lärare godkänt sitt deltagande och användande av det empiriska underlaget som de tillsammans

har samlat in. Det i sig ersätter inte mina etiska överväganden om vad som framställs i studien (Vetenskapsrådet, 2017).

I de fall videodokumentation har förekommit har samtliga vårdnadshavare, yrkesverksamma lärare och lärarstudenter godkänt hanteringen av datainsamlingen. All datainsamling bevaras vid Malmö universitet och enbart berörda forskarteam inom respektive studie har tillgång till materialet (Vetenskapsrådet, 2017).

5.8 Forskarens roll

Jag hade arbetat som förskollärare i 11 år och 1–7 MaNO-lärare i 16 år när studierna genomfördes. Jag hade dessutom arbetat med skolutveckling i 11 år inom både förskola och skola. Vid genomförandet av studierna inom lärarutbildningen hade jag arbetat som lärarutbildare under två år, vilket kan vara en fördel för min objektivitet i genomförandet av studierna vid lärosätet. Dessutom har jag valt att genomföra samtliga moment i alla fyra studierna tillsammans med andra lärarutbildare/lärare/skolutvecklare för att undvika övertolkningar, och klara att behålla den analytiska skärpan. Samtidigt kan det vara en nackdel att studera en verksamhet som jag inte är väl insatt i, eftersom jag kan missa väsentligheter som den som är välbekant inom verksamheten uppfattar.

Att agera som lärarutbildare i det ena utvalda lärarprogrammet och inte i det andra kan såklart innebära forskningseffekter som måste belysas i studien. Detsamma gäller studie två och fyra. I studie två agerade jag aktiv handledare men inte i den fjärde. Samtidigt utgår en Learning study och en Lesson study från samplanering av lektionen av alla inblandade lärare. Det är själva innehållets behandling i undervisningen, i relation till lärandeobjekt, som analyseras med utgångspunkt i resultaten utifrån ett för- och eftertest. Att det är fokus på lärandeobjektets behandling, och inte lärarobjektet i sig, kan bidra till att minimera forskningseffekterna av eget deltagande i de studier jag har varit aktivt involverad i avseende utbildningsinlagen. Samtidigt är forskningen inriktad mot att åstadkomma skillnad, och kollaborativ praktikutvecklande forskning sker gemensamt med respondenterna. Det är i skenet av detta som avhandlingens resultat ska förstås.

6 RESULTAT

Den här avhandlingens syfte är att studera på vilket sätt kollaborativ undervisningsutvecklande professionsutbildning för blivande och verksamma lärare i matematik i de yngre åren utvecklar deras syn på och förståelse av vilket matematikkunnande undervisningen erbjuder barn och elever att utveckla. För att bidra till kunskap om vad, i professionsutbildning för blivande och verksamma lärare, det är som bidrar till deras utvecklade förståelse av barns och elevers matematikkunnande har fyra studier genomförts. I resultatdelen lyfts fram vilka inslag som bidragit till att lärarstudenter och verksamma lärare förändrat och utvecklat sin förståelse.

6.1 Studie 1

Det finns få studier som undersöker hur konstruerade videoklipp kan bidra till att identifiera lärarstudenters förmåga att erfara barns utforskande av matematik i förskolan. Resultaten i studien visar hur lärarstudenterna förändrar sin förståelse för hur barn utforskar matematiska begrepp i ostrukturerade aktiviteter. I studien utforskar studenter i förskollärarytbildningen barnens matematiska kunskaper i förskolan under en högskoleförlagd kurs, för att lärarstudenternas förmåga att utveckla barns matematiska kunskaper ska öka.

6.1.1 Studiens resultat

Syftet med denna studie är att analysera på vilka sätt videoinspelade matematiska aktiviteter kan användas för att undersöka förskollärarstudenters förmåga att identifiera barns matematiska förståelse i förskolan. Det matematiska innehållet, som ingår i kursen studenterna deltar i, baseras på

Bishops sex matematiska aktiviteter (1988). I studien deltar 143 förskollärarstudenter i en kurs, tillsammans med lärarutbildare, där det erbjuds både föreläsningar och workshops inom det matematiska innehållet och hur undervisning kan utformas med stöd av variationsteoretiska antaganden. De ämnesteoretiska och ämnesdidaktiska teorierna har bidragit till en förändrad förståelse av hur matematikundervisning kan utformas även inom fri lek, eller ostrukturerade lärsituationer. Samtidigt studerades designens betydelse av de videoklipp som använts i kursinslagen, och på vilket sätt denna möjliggjort urskiljning av det intentionella lärandeobjektet. En ordanalys genomfördes för att identifiera vilka begrepp som förskollärarstudenterna använder när de uttrycker vad de urskiljer i de elva dokumenterade videoklipp av möjliga lärotillfällen som visas för och analyseras av studenterna vid tre tillfällen under kursen.

Översiktligt visar resultaten av förtestet att förskollärarstudenterna ser matematik i förskolan som att räkna och mäta. Dessa båda matematiska begrepp är dock inte helt i linje med de matematiska aktiviteterna räkna och mäta, enligt Bishop. Det innebär att det inte finns representationer för exempelvis siffror i samband med parbildning med antal eller räkneramsa, utan endast siffror som betecknar nominalitet (till exempel nummer på bussen). När siffra som begrepp används är det som symboler eller etiketter, eller begreppsligt felaktigt använt synonymt som tal eller antal.

Förtestet visar att förskollärarna främst urskiljer lekfulla inslag i flera av de videoklipp som illustrerar spel eller fria leksituationer. Det förskollärarstudenterna urskiljer är exempelvis lekfull undervisning (lustfyllt) avseende räkning när barnen erbjuds olika spelsituationer. I eftertestet uttrycks spelen som spelas i stället tillsammans med uttryck som regler eller turordning. Räkna som begrepp får också en förändrad betydelse, och utvidgas till att också omfatta vad specifikt inom att räkna (kardinaltal, parbildning siffra - räkneramsa) som barnen erbjuds att utforska. I eftertestet är det påtagligt att fler matematiska aktiviteter uppmärksammas i samma videoklipp som studenterna fick ta del av före kursen.

I Tabell 3 finns en översikt av hur förskollärarnas urskiljning förändras mellan för-, efter- och fördröjt eftertest i varje videosekvens. Lärandeobjektet (versaler) i tabellen är i förgrunden och utgör de intentionella lärandeobjekten.

Tabell 3

Översikt av förskollärarstudenters uttryck av matematiska begrepp vid tre mätillfällen

LO i video-klipp	Förtest	Eftertest	Fördröjt eftertest
1. RÄKNA/leka	Ordinalitet, räkna, siffror, antal, lustfyllt.	Räkna, förklara, designa, lokalisera	Kardinaltal, symboler, regler, chans, risk.
2.FÖRKLARA/räkna	Sortering, djurens namn, djurens storlek	Sortering, mäta, förklara, lokalisera	Klassificering utifrån likheter och skillnader. Tydliggör relationerna mellan kategorisering, sortering och klassificering.
3.DESIGNA/räkna	Färger, blandade färger, bilhjul, antal bilar och hjul.	Designa, lokalisera, förklara, leka.	Designa-symmetri Lokalisera- riktning
4.FÖRKLARA/räkna	Räkna, vikt, storlek, subtraktion, stenar (mjuka eller hårda)	Mäta, lokalisera, förklara, räkna.	Förklara -sortera Mäta storlek
5.LOKALISERA/räkna	Räkna använder nummer	Räkna, leka, lokalisera, förklara	Räkna-kardinaltal och kvantiteter
6. RÄKNA/leka	Lära sig nummer, plus, para ihop.	Lokalisera, förklara, räkna, mäta.	Leka (spela)-turtagning Räkna-nummer, ett-till-ett-korrespondens.
7.LOKALISERA/räkna	Räkna, skala, pekar på en karta	Lokalisera, mäta, räkna, förklara	Lokalisera-topologisk karta, riktning Räkna-identifiering (nominalitet)
8.DESIGNA/ räkna	Bygga nummer samarbete, färger	Förklara, räkna,	Räkna-räkneramsa, kardinaltal, ett-till-ett-korrespondens.
9. MÄTA/räkna	Form, mäta, var är mitten, division.	Mäta, lokalisera, former, dividera.	Mäta vad som är mitten.
10. LEKA/räkna	Räkna pengar, räkna nummer, plus, minus. Barnen leker affär.	Räkna, förklara, leka.	Leka-tänka hypotetiskt. Leka-följa reglerna (modeller). Leka-problemlösning Leka-abstrahera sand till pengar eller godis.
11.DESIGNA/räkna	Rita geometriska former, räkna hörn beroende av vilken form.	Designa former, förklara, leka	Designa olika matematiska former, hexagon, rektangel.

I analysen framkommer att lärarstudenterna skiftade fokus från procedurrellt matematikkunnande (metoder för beräkning) till konceptuellt matematikkunnande (urskiljning av fler matematiska begrepp inom den matematiska aktiviteten). Detta skiftade fokus kan förklaras genom förskollärarstudenternas fördjupade ämnesteoritiska kunskaper baserat på Bishops (1988) sex matematiska aktiviteter. Dock framkommer även resultat som visar hur designen av videoklippen är avgörande för vad förskollärarstu-

denterna erbjuds att urskilja. I videoklipp 6 (räkna/leka) och 11 (designa/räkna) framkommer att det finns brister i designen av dessa båda videoklipp som ingår i det konstruerade för- och eftertestet. Dessa brister minskar lärarstudenternas möjlighet till urskiljning av det intentionella lärandeobjektet. Det framträder i dessa videoklipp att variationsmönstret främst innebär att förskollärarstudenterna erbjuds att urskilja barnens procedurella matematikkunskaper, genom att aktiviteterna hamnar i förgrunden (varieras) och innehållet i bakgrunden (invariant).

Ytterligare en avgörande aspekt framkom, avseende videotestets konstruktion. Videoklipp fyra (förklara/räkna) och nio (mäta/räkna) utgör lärandesituationer där förskollärarstudenterna har svårt att urskilja barnens matematiska innehållskunskaper, trots förskollärarens riktade fokus på det samma. I den variationsteoretiska analysen av för- och eftertester, där dessa videoklipp ingår, blir det tydligt att alltför många aspekter av lärandeobjektet varieras simultant. Det är främst variationen av att det matematiska innehållet presenteras inom två matematiska aktiviteter samtidigt, som innebär att det blir svårt för lärarstudenterna att urskilja vilket lärandeobjekt som är i fokus.

6.2 Studie 2

Den andra studien belyser hur en professionsutbildningsinsats kan utveckla verksamma förskollärares förmåga att identifiera barns abstraktionsförmåga i fri lek, genom matematiska aktiviteter. Studien baserades på matematiska aktiviteter i fria leksituationer, vilka även i denna studie grundas i Bishops matematiska aktiviteter.

6.2.1 Studiens resultat

Studien syftar till att analysera verksamma förskollärares urskiljning av barns matematiska kunskaper under aktiviteter i förskolan, och definiera hur barns förkunskaper stöder eller begränsar deras lärandemöjligheter. Det matematiska innehållet baseras på Bishops definition av leka, som en matematisk aktivitet (1988). Empirin utgörs av förskollärarnas reflektioner av två dokumenterade sekvenser av barns aktiviteter i fria leksituationer, en videosekvens och ett bildmaterial med skriftliga kommentarer, vilket beskrivs i Tabell 4.

Tabell 4

Översikt av de egendokumenterade observationerna

Videosekvens A (13 m 25 s)	Bilddokumentation B (5 fotografier med tillhörande skriftliga noteringar)
Tre barn leker två lekmodeller, camping och picknick, samtidigt. I den observerade leken urskiljs hur ett av barnen lämnar leken. Ett liggunderlags storlek utgör en kritisk aspekt för det tredje barnet att urskilja de två olika lekmodellerna som utspelar sig samtidigt.	Tre barn leker biograf när ytterligare ett barn ansluter till leken. Leken kollapsar. Inom biografleken innehar ett barn en lekroll som hundvalp. Att förstå hundvalpens olika roller, en karaktär med flera olika uttryck och syften, urskiljs som kritisk aspekt för förståelse av leken.

Den här studiens resultat beskriver hur professionsutbildningsinsatsen bidrog till de verksamma förskollärarnas förändring avseende identifiering av barns matematiska innehållskunskaper. Genom analys av deras egendokumenterade leksekvenser framkommer att barns förmåga att simultant identifiera ett föremål eller en karaktär på olika sätt skiljer sig åt, där barn som har förmåga till simultanitet avseende abstrakt tänkande genomför leken på ett sätt som bidrar till att försvåra deltagande för barn som inte har en utvecklad abstraktionsförmåga. Detta är barnen själva omedvetna om, men genom att lärarna utvecklar förståelse för barnens förmågor kan de bidra till att utveckla dem. Professionsutbildningen bidrog till att lärarna fick en fördjupad förståelse för dessa processer, genom dess kollaborativa samtal med lärarutbildare. Förskollärarna urskilde i huvudsak barns matematiska kunskaper i dessa friare sammanhang när barnen intar olika roller i lekmodeller, som en representation av vardagliga situationer som de möter utanför förskolans kontext. Efter det kollaborativa inslaget urskilde förskollärarna i huvudsak barnens förmåga att imitera och förändra lekarna i relation till matematiska resonemang. Samtidigt innebar detta även reflektioner kring hur dessa sammanhang skulle kunna utvecklas och inkludera samtliga barn i leken. I tabell 5 presenteras två utsagor som exempel på förskollärarnas förändrade förståelse.

Tabell 5

Förskollärarnas utsagor av matematiska kunskaper före och efter det kollaborativa samtalet

Dokumentation	Före	Efter
A	Matematik har blivit tydligare och vi hittar matematik i aktiviteter där vi inte hittade det tidigare. Vi har observerat i barnleken hur de modellerar och resonerar om sin egen verklighet.	De antar olika roller och fastställer vissa regler i leken, som bygger på matematiska resonemang.
B	Ett tvåspråkigt barn, med en annan kulturell bakgrund, vill vara med. Detta barn har aldrig varit på bio och förstår inte varför en hund pratar i telefon. Leken kollapsar.	Istället kan ett spel fungera utmärkt som en lekaktivitet. Här är reglerna tydliga och återkommande. Villkoren är lika för alla spelare. Glädjen kan fördjupas. Vi hoppas att detta kommer att vara ett sätt för ett barn att interagera med andra i gruppen på ett positivt sätt, snarare än att bli uteslutet.

Förskollärarnas fördjupade ämnesteoretiska kunskaper innebar ett förändrat fokus avseende hur matematiska innehållskunskaper kan erbjudas genom leken, som riktades från procedurer till matematiska innehållskunskaper. De ämnesteoretiska kunskaper som lärarna fick ta del av var Bishops definition av den matematiska aktiviteten leka. Dessa ämnesteoretiska studier och analysen av de egendokumenterade observationerna bidrog till förskollärarnas förändrade syn på barns matematikkunnande och därmed även förskollärarnas egen matematikundervisning. Den kollaborativa samarbetsprocessen påverkade förskollärarnas förändrade förståelse av hur matematikundervisningen kan utformas i förskolan, på så sätt att de vidgade sin förståelse av vad och hur detta specifika innehåll kan erbjuda barnen för att på olika sätt påverka deras lärande i leken. Förändringen innebar att lärarna i högre grad urskilde barnens konceptuella matematikkunnande i lärsituationer i förskolan, än procedurerna för leken. Exemplet med att lärarna urskiljer skillnader i barnens förmåga till abstrakt tänkande, som en orsak till att vissa barn inte vill delta i leken, visar hur ett ändrat fokus mot barnens faktiska förmåga kan bidra till att lärare identifierar vilka förmågor barn behöver få möjlighet att utveckla. Före det kollaborativa samtalet identifieras genom förskollärarnas utsagor hur de observerar fler matematiska aktiviteter i leken. Efter samtalet påvisas konceptuellt matematikkunnande, baserat på ämnesteoretiska kunskaper, genom förskollärarnas utsagor om barns visade matematiska resonemang. Det innebär att förskollärarna reflekterar över hur de genom olika lekaktiviteter, som exempelvis spel, kan utmana och utveckla barns resonemangsförmåga.

6.3 Studie 3

Den tredje studien bygger på de resultat som framkom i studie två, där lärarnas fokus på barns procedurella och konceptuella förståelse indikerade hur lärare kan identifiera barns behov av utveckling genom undervisning. I studie tre fokuseras lärarstudenters (blivande grundlärare för årskurs 4-6) urskiljning av elevers procedurella och konceptuella förståelse av matematik. Resultaten från studien bidrar med kunskap om hur undervisning kan utformas för lärarstudenter i lärarutbildningen, ur ett högskoledidaktiskt perspektiv, för att bidra till lärares professionsutveckling.

6.3.1 Studiens resultat

Syftet med denna intervention var att utforska grundlärarstudenters urskiljning av årskurs 6 elevers procedurella och konceptuella kunskande avseende medelvärde. Interventionen innebar att lärarstudenterna genomförde ett förtest före kursinslagen och ett eftertest efteråt. Testen innebar att grundlärarstudenterna muntligt analyserade elevers resonemang kring ett avgränsat innehållsområde (medelvärde) före och efter genomförd forskningslektion, vilket videodokumenterades. Interventionen var utformad som en Learning study. Specifikt undersöktes utvecklingen av grundlärarstudenternas färdigheter för att utforska elevernas matematiska innehållskunskap (knowledge of content and students KCS) ur ett didaktiskt perspektiv, med medelvärdet som innehållsfokus. Deltagare i studien var två lärarutbildare och 64 grundlärarstudenter. Lärarstudenterna var uppdelade i fem grupper och deltog i vardera en forskningslektion.

Både i för- och eftertesten, samt under forskningslektionen, erbjöds lärarstudenterna att urskilja elevernas matematikförståelse genom hur eleverna i samtal uttryckte sig gällande medelvärde. Det visade sig vara problematiskt för lärarstudenterna att förstå vad som var kritiskt för eleverna när de inte klarade att lösa uppgifterna. I sin tur synliggjorde detta även lärarstudenternas egna svårigheter att förstå det matematiska innehållet. Designen av lektionerna för lärarstudenterna var snarlika för grupp ett till tre, men ändrades i interventionerna fyra och fem. För att underlätta för studenterna att fördjupa sin egen matematiska förståelse, konstruerades uppgifter av forskarteamet som designades utifrån variationsteoretiska antaganden, i syfte att underlätta för dem att förstå elevernas problematik.

Lärarstudenterna i fjärde och femte lektionen löste de konstruerade uppgifterna först på egen hand och därefter diskuterades uppgifterna tillsammans med undervisande lärarutbildare. I diskussionerna diskuterades både lösningsförslag och undervisningsmetoder samtidigt i förhållande till de båda konstruerade uppgifterna. Analysen av lärarstudenternas för- och eftertest (se excerpt ur avhandlingens tredje artikel Svensson & Holmqvist, 2021 s. 7) visade att de var osäkra på hur man skulle använda begreppet medelvärde. Även om de förstod hur de skulle lösa de uppgifter eleverna fick, uttryckte de avsaknad av begrepp för och en tydlig definition av vad de gjorde.

Resultaten av studien bekräftar hur begränsade ämneskunskaper leder till svårigheter att förstå och gemensamt diskutera elevernas lärande. Svårigheter att hitta begrepp för att tydligt uttrycka vad de såg gjorde det också svårare att dela sina tankar med de andra lärarstudenterna i gruppen under de kollaborativa samtalen. Detta innebar att de huvudsakligen urskilde och talade om procedurella aspekter, medan de konceptuella aspekterna av elevernas matematiklärande inte urskildes. De konstruerade uppgifterna i grupp fyra och fem påverkade lärarstudenternas möjligheter både att förstå och använda begrepp för att lösa uppgiften, och de urskilde därmed i högre grad elevernas konceptuella förståelse.

Även om det inte fanns något syfte eller forskningsfråga som behandlade vilken kunskap lärarutbildare utvecklade, bidrog studien också med resultat av hur Learning study, med dess iterativa cykler, vägledde lärarutbildarna att utforma undervisningen på ett kraftfullare sätt. Detta resulterar i en ökning av lärarstudenternas resultat i för- och eftertest (se tabell 8 ur avhandlingens tredje artikel Svensson & Holmqvist, 2021 s. 9).

Efter de tre första forskningslektionerna i grupp 1-3 såg teamet inga skillnader mellan lärarstudenternas förståelse för elevernas matematiklärande. Men genom att inte bara prata om de teoretiska ramarna för lektionsdesign, utan också använda dem för att konstruera uppgifter för lärarstudenterna, överbryggades klyftan mellan teori och praktik i lärarutbildningen. Även om lärarstudenterna lärde sig de ämnesteoretiska grunderna för medelvärde och antaganden för att utforma undervisning, verkade det inte möjligt att omvandla denna kunskap till att förstå elevernas problematik förrän lärarstudenterna själva fick lösa uppgifter avseende samtliga lägesmått (median, medelvärde och typvärde) samtidigt, och därefter diskutera detta med varandra och sina lärarutbildare.

6.4 Studie 4

I linje med denna avhandlings logik studeras även professionsutbildning för lärare verksamma i de skolår som motsvarar grundlärairstudenternas intervention i studie tre. Den sista studien som ingår i avhandlingen syftar till att studera hur lärare utvecklar sin undervisningsförmåga avseende två- och tredimensionella objekt i årskurs 4-6, genom kollaborativa samarbetsprocesser. Deltagare i studien var två lärarfortbildare och tre grundlärare.

6.4.1 Studiens resultat

Studiens analys genomfördes med utgångspunkt i tidigare studier om elevers utvecklade spatiala förmåga. Den insamlade empirin som utgjort underlag för analysen utgörs av lärares planering, genomförande och utvärdering av undervisningsinsatsen tillsammans med elevernas för- och eftertest (avhandlingens fjärde artikel Lelinge & Svensson, 2020). Det senare användes som indikator för att urskilja på vilket sätt lärarnas undervisning bidrog till elevernas fördjupade matematikkunnande.

Inledningsvis uttryckte lärarna att matematik utgör ”röd flagg” för en del elever, och de har inställningen att det ska vara färre matematikinslag och tester. Efter forskningslektionen uppmärksammar lärarna dock hur eleverna även i andra ämnen använder sina matematiska kunskaper, det vill säga ett omvänt förhållande. Lärarna använder sig av flera olika representationer och former för att erbjuda eleverna möjlighet att urskilja de två- och tre-dimensionella objekten. Genom att objekten representerades på flera olika sätt ökade möjligheten, enligt läraren, att utveckla elevers matematiska kunskaper i andra sammanhang.

Samarbetet påverkade även lärarnas förändrade förståelse av hur matematikundervisningen kan utformas, på så sätt att de vidgade sin förståelse av vad och hur ett innehåll kan erbjudas eleverna för att på olika sätt påverka deras lärande. Utvecklade instruktioner och aktiviteter bidrog till elevernas ökade kunskaper om två- och tredimensionella objekt. Resultatet visade att lärarnas ökade medvetenhet om vad som krävs för att förbättra undervisningen ökade, samt dess iscensättning i klassrummet.

6.5 Syntes av studiernas resultat

Avhandlingens övergripande forskningsfråga ska besvara vilka inslag i professionsutveckling, för blivande och verksamma lärare i matematik, som bidrar till att de utvecklar en förändrad syn på och förståelse för barns och elevers kunskande och lärande genom matematikundervisning. Utifrån en variationsteoretisk analys beskrivs här vilka aspekter som har identifierats som nödvändiga i lärares utbildning och fortbildning. Det innebär att aspekter har urskilts genom att lärandeobjektets behandling studerats i respektive studie. Syntesen avslutas med att presentera de aspekter som urskilts genom att likheter och skillnader studerats i de fyra ingående studiernas respektive kontexter.

6.5.1 Aspekter av betydelse – förskollärarytutbildning

Det som bidragit till att en förändring skett av förskollärarytstudenternas skiftade fokus på från vad barnen gör, till vad de utforskar som matematiskt innehåll, baseras på kursens inslag av Bishops sex matematiska aktiviteter. Förskollärarytstudenterna har erbjudits ett gemensamt ämnesspråk, genom de sex matematiska aktiviteterna, för att kunna beskriva och urskilja barns utforskande av matematisk innehållskunskap även i fria aktiviteter. Samtidigt urskiljs kritiska aspekter avseende utformningen av undervisningsinlagen för lärarstudenterna. Barnens visade matematiska innehållskunskap visade sig bli svår att urskilja då alltför många innehållsmässiga aspekter varierade samtidigt, som i de videoklipp (4 och 9) som ingick i testet. En kritisk aspekt för blivande förskollärare, för att utveckla sin förståelse för matematikundervisning i förskolan, är att urskilja vad som kan vara matematiskt innehåll och i synnerhet att ändra fokus från det procedurella till det konceptuella perspektivet.

6.5.2 Aspekter av betydelse – fortbildning för förskollärare

Det som bidragit till förskollärarnas förändrade förståelse baseras på de fördjupade ämnesdidaktiska kunskaperna inom den matematiska aktiviteten leka, utifrån Bishops definition. Den matematiska aktiviteten lekas tre komponenter (modellera, abstrahera och hypotetiskt tänkande), erbjuds att urskilja i det material förskollärarna bidragit med i den kollaborativa fortbildningsinsatsen. I dessa observerade förskollärare hur barn med lägre förmåga att samtidigt låta ett föremål eller karaktär ta olika skepnader i

leken, lämnade leken. Förmågan till abstrakt tänkande, genom att låta ett föremål eller karaktär samtidigt ha olika funktioner, blev en kritisk aspekt för barnens lärande, vilket forskollärarna urskilde. Denna form av fusion som vissa barn använde sig av blev utmanande för de barn som hade en mer konkret föreställningsförmåga. Det som är nödvändiga aspekter för utveckling av verksamma forskollärares förståelse av barns matematikkunskande är förmåga att dels urskilja barnens kunnande, men även att urskilja innehållsmässiga aspekter nödvändiga för att förstå detta kunnande.

6.5.3 Aspekter av betydelse – grundlärautbildning

Genom att erbjuda lärarstudenterna fördjupad kunskap om det matematiska innehållet (medelvärde) ökade möjligheterna för grundlärastudenterna att urskilja elevers förståelse av detsamma. Även om undervisningsinslagen i de tre första forskningslektionerna innehöll såväl teoretiska inslag om lärande som kollaborativa samtal räckte inte detta för att studenternas förmåga att urskilja elevernas svårigheter skulle utvecklas. Däremot ledde den iterativa processen i den genomförda Learning studyn till att lärarutbildarna successivt urskilde grundlärastudenternas behov av specifika matematikkunskaper avseende medelvärde. Att bara prata eller berätta om medelvärde var inte tillräckligt. Det innebar att forskarteamet i sin undervisningsdesign, som baserades på variationsteoretiska antaganden, konstruerade inslag i undervisningen som erbjöd lärarstudenterna att urskilja vad som var innehållsmässiga kritiska aspekter. I sin tur möjliggjorde det att lärarstudenterna kunde urskilja elevernas matematiska innehållskunskap i de videoklipp de analyserade kollaborativt.

6.5.4 Aspekter av betydelse – fortbildning för grundlärare

Fortbildningsinsatsen för de verksamma grundlärarna baserades på kollaborativa samtalsformer, där lärare och forskare tillsammans deltog, bidrog till lärarnas förmåga att urskilja elevernas förståelse av innehållet och på vilket sätt undervisningens design kan bidra till att utveckla denna förståelse. Lärarna använde olika form av kontrast i undervisningen för att utveckla elevernas förståelse av innehållet, där samma objekt (två- eller tre-dimensionella) presenterades med hjälp av flera olika representationer. Genom analys av lärarnas samtal i den kollaborativa processen urskildes lärarnas förändrade förståelse av hur elever lär och utforskar geometriska objekt. Eftersom en av lärarna är legitimerad bildlärare fick eleverna i

denna studie fördjupade matematiska innehållskunskaper om geometriska objekt utifrån andra ämnesperspektiv. I studien, liksom i studien av verkssamma förskollärare, har de ingående lärarna ett samtidigt fokus på de innehållsmässiga aspekterna och elevernas kunskande.

6.5.5 Generella och specifika aspekter

Det finns två generella aspekter som framkommer i alla fyra studierna. Den första som urskiljs är betydelsen av fördjupade ämneskunskaper i relation till valt lärandeobjekt. Den andra som urskiljs är hur innehållet som lärandeobjekt förstås i relation till dess behandling i undervisningen.

I studie 1 framgår det av tabell 3 att förskollärarstudenterna utvecklar sin förståelse av barns utforskande av matematiska begrepp efter att de studerat Bishops definition av de sex matematiska aktiviteterna. Samma resultat framkommer i studie 2 (se tabell 5) när förskollärarna urskiljer barns matematiska utforskande i fria leksituationer baserat på den matematiska aktiviteten leka enligt Bishops definition. I studie 3 (se Svensson & Holmqvist, 2021 tabell 8, s. 9) ökar grundlärarstudenternas förmåga att urskilja elevernas svårigheter och kunskande avseende medelvärde efter att de själva utvecklat sin egen förståelse. I den fjärde och avslutande studien ökar elevernas kunskaper om två- och tredimensionella objekt (se tabell s. 786 och 789 Lelinge & Svensson, 2020) i takt med att lärarna gemensamt identifierar vilka aspekter som är nödvändiga för eleverna att urskilja i undervisningen. Det innebär att i samtliga fyra studier sker en förändring avseende de blivande lärarnas och lärarnas förändrade fokus, från att initialt främst urskilja och uttrycka aspekter som handlar om procedurellt matematikkunskande, till att rikta fokus mot det konceptuella matematikkunskandet efter utbildningsinsatserna.

Den andra kritiska aspekten (det vill säga avgörande) för lärares förändrade förståelse är kopplingen mellan hur den fördjupade förståelse av innehållet relateras till på vilka sätt barnen och eleverna förstår innehållet och leder till en utvecklad undervisningsdesign i samtliga studier. I studie 2 förändrar förskollärarna (se tabell 5) sin förståelse, vilket blir synligt i analysen av deras diskussioner om de dokumenterade leksituationerna i deras egen praktik. Förskollärarna urskiljer vad som bidrar till barnens avvikelse i leken, finner förklaringar till varför vissa barn fortsätter och utvecklar en lek medan andra överger den. Den icke gemensamma sociala

kontexten (som modell) lyfts fram av förskollärarna som orsak, medan analysen av situationen visar att barnens olika förmågor att samtidigt förstå ett föremål eller en karaktär på flera olika sätt utgör ett hinder för de barn som inte utvecklat en sådan förmåga. I studie 3 framträder betydelsen av att främja lärarstudenternas förståelse av samtliga lägesmått samtidigt, för att fördjupa deras förståelse vad medelvärde är, och inte är. I den tredje studien är det forskarteamets analys av lärarstudenternas svar på för- och eftertest som visar brister i lärarstudenternas matematikkunskaper. Genom att designa uppgifter för lärarstudenterna, utifrån variationsmönstret fusion med samtidig variation av samtliga lägesmått, urskiljer studenterna innehållsmässiga aspekter som underlättar deras egen analys av elevernas matematikkunskaper. I den fjärde studien urskiljs hur grundlärarna urskiljer nya aspekter om hur elever lär två- och tredimensionella objekt genom den kollaborativa fortbildningsinsatsen, och utformar en undervisningsdesign baserat på elevernas uttryckta förståelse (se Lelinge & Svensson, 2020 s. 786 och s. 789).

För att utveckla blivande och verksamma lärares förmåga att undervisa i matematik krävs ett större fokus på hur barns och elevers matematikkunskande kan förstås och utvecklas (KCS). Studierna visar att det krävs goda ämneskunskaper, och goda kunskaper om hur ett innehåll kan erbjudas genom undervisningsinsatser. Detta är aspekter som är en utmaning för lärarutbildare, det vill säga hur man på bästa sätt utformar undervisning som bidrar till att blivande och verksamma lärare utvecklar denna förmåga. I de båda studierna som genomförs med verksamma förskollärare och grundlärare fördjupades förståelsen genom att de erbjöds att reflektera över egendokumenterade observationer av barnens och elevernas förståelse. Lärarna utvecklar indirekt sina egna matematiska kunskaper genom att studera barnens och elevernas matematiska förståelse (KCS). När det gäller blivande förskollärare och grundlärare, det vill säga studenter i lärarutbildningen, urskiljs aspekter gällande behovet av att uppmärksamma lärarstudenternas innehållskunskaper (CK) i relation till vad de förväntas beakta avseende barn och elevers innehållskunskap. Till skillnad mot de yrkesverksamma, som utvecklar och fördjupar sina egna innehållskunskaper i samband med att de urskiljer samt utvecklar barn och elevers innehållskunskaper (KCS) genom samarbetsprocesser, behöver blivande lärare särskilt erbjudas att utveckla sin förståelse av barns och elevers kunskapsutveckling i matematik.

7 DISKUSSION

Detta kapitel inleds med en resultatdiskussion utifrån avhandlingens syfte och ställda forskningsfråga, på vilket sätt professionsutbildning bidrar till att blivande och verksamma lärare förändrar sin förståelse av matematik-kunnande och undervisning i förskola och grundskola. Därefter kommer en konklusion av avhandlingens resultat att presenteras. Vidare följer en metoddiskussion i relation till avhandlingens valda forskningsdesign för att kunna besvara ställd forskningsfråga. Till följd av metoddiskussionen beaktas även vilka begränsningar som har framkommit. Kapitlet avslutas med avhandlingens kunskapsbidrag och implikationer för undervisning samt framtida forskning.

7.1 Resultatdiskussion

Enligt TALIS (OECD, 2019) framträder lärares önskemål om att få reflektera utifrån egendokumenterade dilemman (fallstudier). I den här studien baseras studie 2, 3 och 4 på lärarnas egendokumenterade iscensatta lärsituationer i förhållande till egenvalt intentionellt lärandeobjekt. Inom dessa studier utgör samarbetsprocesser, enligt Lesson study-modellen, betydande inslag för lärarnas förändrade förståelse av sin egen matematikundervisning med utgångspunkt i barnens och elevernas lärande. Lesson study är en modell som används i hela världen både för lärares professionsutveckling och elevers matematiklärande (Holmqvist, 2017).

De resultat som presenterats visar att matematisk innehållskunskap, i relation till vad elever och barn förväntas lära sig, är av avgörande betydelse för att öka möjligheterna för utveckling av konceptuell förståelse. Detta stämmer överens med tidigare forskning, som visar att det primära för att utveckla kunnande är att lärare fokuserar på ämnesinnehållet i relation till

den aktuella elevgruppen (Lo & Pang, 2005). Det innebär, för att förstå ett specifikt innehåll måste läraren ha kunskaper om vilka egenskaper innehållet består av, samt vilka aspekter eleverna behöver urskilja av dessa egenskaper (a.a.). Inom det matematikdidaktiska forskningsfältet förespråkas betydelsen av lärares ämnesspecifika kunskaper i matematik (Skott m.fl., 2018). I den här studien framkommer liknande resultat avseende lärarstudenterna. I de båda studierna (1 och 3) som studerar lärarstudenters förmåga att urskilja barns och elevers matematikkunnande identifieras behovet av specifika ämnesteoretiska kunskaper. Tutak och Adams (2017) presenterar resultat avseende ökad innehållskunskap, trots ringa matematikkunskaper, när lärarstudenter erbjuds undervisa det matematiska innehållet med elever. Liknande framkommer i relation till vad barn och elever förväntades utveckla i studie 2, 3 och 4. Denna förändrade förståelse baserades på inslagen av kollaborativa samarbetsprocesser med utgångspunkt i ämnesteoretiska kunskaper i förhållande till elevgruppens visade matematikkunnande. Klim-Klimeszwska & Nazaruk (2020) visar i sina resultat att lärare i de tidigare åldrarna har svårt för att uppfatta barns utforskande av matematiska begrepp, som exempelvis geometri, i friare leksituationer. Att identifiera barns och elevers utforskande av matematiska begrepp i friare sammanhang visade sig även i den här studiens resultat utgöra en kritisk aspekt. Främst urskildes det matematiska kunnandet som procedurell kunskap, det vill säga förmågan att beräkna och utföra uppgifter. Trots att läraaktiviteterna, som exempelvis i studie 1 och 3, erbjöd barn och elever konceptuellt matematikkunnande urskilde lärarstudenterna inte detta. Ball och Cohen (1999) hävdar att informell kunskap bör presenteras och visualiseras i vardagliga sammanhang, vilket i fallen med förskollära barns videoklipp av aktiviteter i förskola bidrog till. Shulman (1986) menar att dilemman (fallstudier) kan utgöra viktiga inslag i lärarutbildningar för att erbjuda lärarstudenterna autentiska utbildningssammanhang. Genom dessa möjliggörs reflektion och distansering tillsammans med kollegor. Enbart reflektion tillsammans med andra bidrog i den här studien inte till att lärarstudenterna urskilde elevernas matematiska kunnande, det krävs även ett specifikt innehållsmässigt fokus (Svensson & Holmqvist, 2021). Det innebär att brister i lärarstudenternas matematikkunnande urskildes, varpå specifikt designade uppgifter för att fördjupa deras ämnesteoretiska bidrog till att fördjupa deras kunnande. Att konstruera uppgifter med tydlig koppling till didaktiska inslag är avgörande för att optimera konceptuell kunnande

(Chapmans, 2013). Detta styrks av resultaten i studie 3, gällande lärarstudenternas konceptuella förståelse av medelvärde både utifrån matematisk innehållskunskap och didaktisk innehållskunskap (se tabell 8 Svensson & Holmqvist, 2021 s. 9). Detta påvisar den komplexitet som undervisning är och betydelsen av att beakta hur ett lärandeinnehåll synliggörs och behandlas i dessa dilemman (Klette, 2007; Shulman, 1986; Svensson & Holmqvist, 2021). Lärarrollen innebär att kunna bedöma elevers visade kunskande genom deras svar (White, 2003), för att öka möjligheterna för utvecklad konceptuell förståelse, vilket lärarstudenterna uppvisade svårigheter i (Svensson & Holmqvist, 2021; Svensson inskickad). Enbart teoretisk förståelse av ämnet bidrar dock inte till konceptuell undervisningsförståelse (Ball & Cohen, 1999). En konceptuell undervisningsförståelse beygger även på att förstå hur innehållet i sig behandlas och förstås av eleverna. Genom Learning studys iterativa process urskildes och förändrades lärarstudenternas möjligheter att summativt och formativt bedöma elevernas resonemang om medelvärde i det konstruerade för- och eftertestet. Det genom att forskarteamet beaktade sin undervisning genom att studera hur lärarstudenterna förstod innehållskunskapen medelvärde samt hur de förstod hur eleverna förstod detsamma.

7.1.1 Förskola

Tidigare studier har presenterat betydelsen av förskollärares didaktiska val för att bidra till barns matematiska kunnande (Alkhede, 2021; Björklund m.fl., 2018). Samtidigt har Björklund med m.fl. (2018) tagit upp hur de allmänna läroplansmålen för förskolan medför att förskollärare behöver utveckla kunnande om hur deras didaktiska val faktiskt bidrar till förskolans måluppfyllelse. Dessa didaktiska val behöver grunda sig i barnens utforskande av matematik, vilket kan begränsa huruvida förskollärare urskiljer matematiska kunskaper i olika sammanhang (Svensson, 2017). Björklund m.fl. (2018) argumenterar för betydelsen av att förskollärare även erbjuder verktyg för att kunna identifiera vilket lärande som lärares didaktiska val erbjuder. Genom de kollaborativa inslagen, tillsammans med fördjupade ämnesteoretiska kunskaper baserade på Bishops (1988) sex matematiska aktiviteter, identifieras både hur förskollärarstudenter och förskollärare urskiljer barns utforskande av matematiska begrepp i fler sammanhang (Svensson inskickad).

Zippert m.fl. (2019) lyfter att det finns få studier om hur fria eller ostrukturerade lekorienterade situationer bidrar till matematiskt lärande. Det får konsekvenser även inom lärarutbildningen, om denna inte bidrar till förändring av lärarstudenternas relation till matematikundervisning och lärande (Rowland m.fl., 2014). Om lärarstudenterna inte erbjuds diskutera dessa dilemman är risken stor att de inte identifierar barnens utforskande av matematiska begrepp i liknande situationer i förskolan. Samtidigt utmanas lärarutbildningen att uppmärksamma inte enbart hur undervisningen iscensätts inom dessa friare lärosammanhang, utan även vilket matematiklärande som erbjuds barnen (Güven & Dedes, 2017).

Björklund m.fl. (2018) hävdar att Learning study-modellen, tillsammans med variationsteoretiska antaganden, ökar möjligheten att utveckla PCK. I den här studien ökar både innehållskunskap och pedagogisk innehållskunskap för att stödja barns utvecklade matematiska kunskaper. Bishops (1988) sex matematiska aktiviteter med särskilt fokus på lekas tre begrepp (modellera, abstrahera, hypotetiskt tänkande) kan därmed tolkas som betydande inslag tillsammans med det kollaborativa lärandet i form av samtal (Holmqvist, 2017) och de egenvideodokumenterade lekobservationerna (Rowland, 2014). Ämnesteorier ger möjligheter att kunna diskutera innehållskunskap med andra lärare samt pröva sin ämnesdidaktiska kunskap (PCK) i egen praktik (se tabell 5). Både i studie 1 och studie 2 urskiljs deltagarnas nyförvärvade matematiska kunskaper i relation till Bishops (1988) sex matematiska aktiviteter. Skillnaden mellan de båda dimensionerna utgörs av att lärarstudenternas förändrade förståelse främst baseras på att de uppmärksammar fler formella matematiska begrepp (volym, antal, geometriska objekt). Förskollärarnas förändrade förståelse i studie 2 utgörs främst av fördjupade kunskaper i relation till hur barnen visualiserar sitt matematiska kunnande för att delta i lek.

7.1.2 Skola

Genom det intentionella lärandeobjektet, i relation till det iscensatta, framträdde hur lärarstudenternas kunskapsutveckling inte var i enlighet med lärarutbildarnas intentioner. Själva iscensättningen av forskningslektionen behövde utvecklas och mer stämma överens med lärarstudenternas visade kunskaper. Learning study-modellen (Holmqvist, 2011) och variations teorin bidrog som betydande inslag för forskarteamet att identifiera lärarstudenternas för- och efterkunskaper i förhållande till intentionellt och

iscensatt lärandeobjekt (Marton & Pang, 2005). I de tre första forskningslektionerna (1-3) förändrades lärarstudenternas kunskaper inte märkbart avseende att analysera och identifiera elevers visade kunnande. Identifiering av lärarstudenternas för- och efterkunskaper, i relation till undervisningens innehåll, bidrog till att förändra designen i syfte att utveckla studenternas matematikkunskaper. Detta tycks ha haft betydelse för deras förmåga att urskilja betydelsen av både procedurrell (beräkning) och konceptuell (veta premisserna för det som beräknas) matematiklärande. Denna design är ett didaktiskt inslag som grundades i tidigare studiers resultat, där det framkom att det fanns ett stort fokus på procedurrella förmågor.

Både lärarstudenter och verksamma lärare erbjuds fördjupa sina matematiska kunskaper, men på olika sätt i studie 3 och 4. Lärarnas fördjupade kunskaper sker bland annat genom att de utgår från både matematikämnets och bildämnets kursplanemål, vilket bidrar till att de uppmärksammar elevernas matematiska kunskaper i andra sammanhang, och därmed utvidgar den matematiska förståelsen (Rowland m.fl., 2014). Undervisningsdesignen möjliggör att både lärarstudenter och verksamma lärare fördjupar sina ämnesdidaktiska kunskaper, genom ett samtidigt fokus på innehåll och elevernas förståelse av innehållet. I studie 4 bidrar det kollaborativa lärandet till förändrad förståelse av hur lärarna ska arbeta med att fokusera på elevernas möjligheter att lära det valda lärandeobjektet, genom att de utgår från elevernas förståelse. Samma identifieras i studie 3, där det visar sig att lärarstudenternas kunskaper är en kritisk aspekt för att identifiera och kunna diskutera elevernas uttryckta förståelse. Lärarutbildarna behövde i sin tur identifiera lärarstudenternas kunskaper och rikta fokus på sin undervisningsdesign för att förstå vilken kunskap lärarstudenter behöver utveckla. Analysen av resultaten från för- och eftertester bidrog till att lärarutbildarna fick en förändrad förståelse av undervisningens design. Dessa inslag bidrog till att undervisningens design skiftade fokus från att enbart berätta om lägesmått och låta lärarstudenterna på egen hand diskutera elevernas förståelse, till att undervisa med utgångspunkt i lärarstudenternas identifierade för- och efterkunskaper. Även inom denna kontext framträder hur lärare utvecklar matematisk innehållskunskap samt hur detta ska undervisas i relation till elevernas visade för- och efterkunskaper (KCS). Lärarutbildarna urskiljer lärarstudenternas innehållskunskaper avseende intentionellt lärandeobjekt som begränsat, vilket leder till ändrad lektionsdesign i kursen (Svensson & Holmqvist, 2021).

7.1.3 Likheter och skillnader i studiens praxisgemenskap

Det gemensamma i praxisgemenskapen är att när den organiserade undervisningsmetodens iscensättning kännetecknas av en något friare karaktär, uppvisar samtliga deltagare svårigheter att urskilja intentionellt lärandeobjekt. Det kan uppstå motsättningar i hur undervisningen ska designas för att utveckla procedurell respektive konceptuell matematisk kunskap. Genom fördjupad teoretisk medvetenhet kan lärare utmana sin förståelse för vilken design som främjar olika former av matematisk kunskap (Björklund m.fl., 2018). De teoretiska utgångspunkterna utgör redskap för att rikta fokus och identifiera hur innehållet behandlas och förstås. Det kräver dock att det ges möjligheter att genom exempelvis ämnesteorier och/eller lärandeteori, studera barns och elevers lärande av specifika innehåll.

Den teoridrivna undervisningen i respektive studie har bidragit till att urskilja fortbildningsinslagens betydelse i denna specifika praxisgemenskap (Wenger, 2000) samt nyansering av dess påverkan, genom urskiljning samt ökad förståelse av dess särdrag som är kritiska avseende undervisningsinnehållet (Marton m.fl. 2004; Huang m.fl., 2019). Kappans resultat har visualiserat en dimension som framträder i avhandlingens båda kontexter i förhållande till hur inslag i olika utbildningssammanhang kan bidra till att utveckla förståelse av hur matematikundervisningen kan utformas för att utveckla barns och elevers matematiska kunnande. Genom att samtidigt rikta blicken mot undervisningens design och barns/elevs kunskaper analyserades skillnader mellan det intentionella och iscensatta lärandeobjektet i de olika utbildningssammanhangen med utgångspunkt i variationsteoretiska antaganden. Det i sig bidrog till att jag som forskare kunde rikta fokus på skillnader mellan och inte enbart inom utbildningens design, vilket är mer frekvent förekommande inom Learning study. Det innebär att variationsteorin har kunnat utgöra ett stöd för mig som forskare både för att urskilja varje studies som den övergripande kappans resultat.

Med utgångspunkt i ett variationsteoretiskt perspektiv har den här studiens resultat visat betydelsen av att reflektera över hur matematisk innehållskunskap behandlas i respektive utbildningssammanhang i relation till den lärandes förståelse (KCS). Att enbart erbjuda matematisk innehållskunskap (CK) visade sig inte vara tillräckligt för att bidra till lärares didaktiska utveckling. Genom iterativa processer och samarbetsprocesser baserade på teoretiska utgångspunkter urskildes betydelsefulla skillnader mellan lärarutbildning och fortbildning. Den komponent i MKT som tycks

vara helt avgörande utifrån denna avhandlings resultat, och därmed kritisk, i undervisning och fortbildning av verksamma lärare, tycks vara komponenten "knowledge of content and student", KCS (Ball m.fl., 2008), det vill säga det ömsesidiga fokus som lärare ska ha på innehållet och hur eleverna förstår detta innehåll (student content knowledge). Här kan man se en skillnad mellan blivande lärare och verksamma lärare, där de förra har ett större fokus på innehållet medan de verksamma har ett tydligare delat fokus på innehåll och barns och elevers kunskaper. Den skillnad som finns mellan förskola och skola är att innehållet är tydligare definierat i skolan än i förskolan, vilket ställer särskilda krav på utbildningen för att identifiera barns tidiga matematikutveckling, det vill säga förmågor som behöver utvecklas innan barn formellt räknar och opererar med tal.

7.2 Konklusion

Det som har framträtt i studierna som denna avhandling består av är hur lärares och lärarstudenters tidigare erfarenheter av matematiska begrepp och undervisningsmetoder begränsat eller möjliggjort matematiklärande. De kritiska aspekter som urskilts genom ett variationsteoretiskt perspektiv i syntetiseringen av de ingående fyra studierna är: För det första betydelsen av ämnesteoretiska innehållskunskaper. För det andra betydelsen av förståelse i hur innehållskunskapen behandlas och förstås i undervisningssammanhang. Såväl lärare som lärarstudenter i förskolan visade i större utsträckning svårigheter att identifiera barns informella kunskapsutveckling, samt svårighet att identifiera lärandets innehåll. Avseende lärarstudenter och lärare i grundskolans årskurs 4-6 hade de mindre svårigheter att identifiera innehållet, däremot fanns samma svårigheter med att identifiera barns och elevers förståelse av innehållet för lärarstudenterna. Kollaborativ professionsutbildning är därmed inte lösningen för att höja utbildningskvalitet. I den här avhandlingen har det visat att de ämnesteoretiska och ämnesdidaktiska teoriernas har stor betydelse för att generera konceptuellt matematiklärande för barn och elever, specifikt i mer ostrukturerade undervisningssammanhang. Att enbart erbjuda diskussioner lärare emellan kan innebära att fokus ensidigt riktas mot sociala processer, där såväl det procedurella som konceptuella matematiklärandet kommer i bakgrunden. Men genom att utgå från den lärandes förkunskaper, oavsett det gäller lärarstu-

denter/lärare/elever eller barn, ökar möjligheterna till en förändrad förståelse av undervisningens betydelse. I sin tur innebär det ökade möjligheter för konceptuellt matematiklärande när undervisningens design fokuserar på innehållsmässiga aspekter i relation till den lärandes förståelse. Genom kollaborativa samtalsformer baserat på teoridriven undervisning ökar möjligheterna även för konceptuell undervisningsförståelse. I professionsutbildning med ett delat fokus på innehåll och den lärandes förståelse av detta innehåll ökar möjligheterna, både för yrkesverksamma lärare och lärarstudenter, att utveckla matematiskt kunnande. Det blir särskilt betydelsefullt inom lärarutbildning för blivande förskollärare eftersom det matematiska innehållet inte är lika framträdande inom denna kontext, och inte heller förståelsen för barns och elevers kunskapsutveckling i ämnet. Barns förmågor behöver både identifieras och utvecklas tidigt när de formellt inte räknar eller opererar med tal såsom CK oftast presenteras inom matematikundervisning. Det innebär att MKT utifrån den här studiens resultat behöver beaktas i större utsträckning inom olika utbildningssammanhang och mer specifikt inom lärarutbildningen mot de yngre åldrarna.

7.3 Metoddiskussion

Genom inspiration av Cresswells (2014) sekvensanalys analyserades fyra steg var för sig (steg 1-4) och därefter påföljande steg fem för att kunna besvara avhandlingens syfte och frågeställning. Det innebar att likheter och skillnader kunde identifieras, med utgångspunkt i variationsteoretiska antaganden i syntesen, och därmed bidra till att lyfta fram kritiska aspekter för professionsutbildning för lärare i matematik.

Studierna har alla utgått från en praktikutvecklande forskningsansats. En svårighet med kollegial praktikutvecklande forskning är att den vetenskapliga stringensen kan komma i konflikt med följsamheten till deltagarna. Eftersom studierna har fokuserat på fyra olika kontexter vid fyra olika tidpunkter har val av innehåll och fokus styrts av deltagarnas utbildningar. Detta kan betraktas såväl som en styrka som en svaghet. Genom att utforma studierna som iterativa processer, där kollegiala reflektioner och analyser tillsammans med utbildningsinslag utgjort modellen för studierna, har studierna dock byggt på en övergripande progressionslogik. Denna har inneburit att skillnader mellan lärarstudenters och verksamma lärares utbild-

ningsbehov skiljer sig, samt även att det finns skillnader i kunskap där matematikinnehållet är mer eller mindre tydligt identifierat som undervisningsinnehåll. Det finns risk att dessa resultat inte framkommit om forskningsdesignen varit mer enhetlig och inte tagit hänsyn till de specifika kontexterna.

Genom att utforma för- och eftertester har lärarstudenternas och de verk samma lärarnas utvecklade förståelse för sin undervisning i matematik kunnat analyseras. Såväl inslag i testen, till exempel utformningen av de videoinspelningar av lärsituationer som analyseras, som hur kursinslagen har designats har byggt på samma teoretiska antaganden. Trots det har det under studiernas gång visat att det funnits vissa brister som i sig utgör ett resultat av vad som är kritiskt i utformning av utbildning för lärare i matematik.

Det kan diskuteras huruvida studierna som ingår i avhandlingen (1-4) hade kunnat genomföras annorlunda och därmed ökat möjligheterna att på ett generellt sätt besvara avhandlingens syfte och ställda frågeställning. Att kombinera kvalitativa och kvantitativa metoder har dock bidragit till avhandlingens djup och bredd (Johnson m.fl., 2007). En svaghet som gäller samtliga studier är avsaknad av kontrollgrupper. Det är enbart i studie 3 som de fem olika grupperna sinsemellan kan fungera som kontroll till varandra. I de övriga tre studierna (1, 2 och 4) finns svagheter gällande avsaknad av möjligheter att jämföra med kontrollgrupper för att bättre kunna förstå vad som utgör den förändrade förståelsen. Det bidrar till reflektioner om att fortsättningsvis beakta behovet av att införa kontrollgrupper eller utveckla forskningsmetoden mer i linje med iterativa processer som Learning study-modellen vid praktikutvecklande forskningsansatser. Genom att ha en mer likartad metod i samtliga studier, och även ha ett gemensamt innehåll i de båda studierna för grundlärarna, hade studien kunnat bli mer stringent.

7.4 Begränsningar

Avsaknaden av kontrollgrupper och iterativa processer i tre av studierna i den här avhandlingen innebär begränsningar för att stärka resultatets generaliserbarhet (jämför med Larsson, 2005). Samtidigt har detta vägts upp genom att utgå från både kvantitativa och kvalitativa metoder (Johnson

m.fl., 2007). Tolkningen av resultaten i studie fyra, där lärarnas egenkonstruerade för- och eftertest inte var i linje med vad de identifierat som lärandeobjekt, har blivit begränsad. Samtidigt visar studiens resultat att avsaknaden av tydliga teoretiska utgångspunkter blir begränsande för undervisningens kvalitet. Det som utgjorde en begränsning i studie fyra, visade sig vara betydande för att i kappan kunna belysa fortbildningsinslagens påverkan för vilket matematiklärande som de yrkesverksamma lärarna erbjöd sina elever. Samma gäller studie 1, där det som framkom vara problematiskt i konstruktionen av för- och eftertest för förskollärarstudenterna att urskilja intentionellt lärandeobjekt, bidrog till att rendera data för att besvara kappans syfte och frågeställning. Det som är begränsningar i ett sammanhang kan bli möjlighet i ett annat sammanhang baserat på studiens problemområde.

Begränsningar avseende kontrollgrupper kvarstår dock främst i förhållande till att kunna urskilja förändringars påverkan. Vid genomförande av studier med praktikutvecklande forskningsansats kan kontrollgrupper styrka validitet och trovärdighet av de eventuella förbättringar som framträder.

7.5 Kunskapsbidrag och implikationer för undervisning

Varje studie har ett eget kunskapsbidrag gällande praktikutvecklande forskningsansats. Det som avhandlingen bidrar med är inte enbart att belysa förändrad förståelse utan även att studera dess påverkan för vilket matematiklärande som erbjuds. Därmed inte sagt att avhandlingen besvarar denna komplexa fråga i en kontext som matematikundervisning utgör. Snarare bidrar avhandlingen med ytterligare en pusselbit i hur undervisningsutvecklande professionsutbildnings utformning påverkar vilket matematiklärande som erbjuds i olika utbildningssammanhang. Hur lärarutbildningen och praktiken bildar en praxisgemenskap behöver beaktas i större utsträckning om matematikundervisningen ska kunna förbättras. Blivande matematiklärare behöver erbjudas en undervisning genom hela sin lärarutbildning som ger en förståelse för hur deras matematikundervisning även i ett något friare sammanhang inverkar för barns och elevers förståelse. Risken är annars påtaglig att förutom lärarstudenter även framtida elever fortsätter att erbjudas enbart procedurellt matematiklärande inom sociala aktiviteter i matematiklassrummet. För att rikta större fokus mot konceptuell

matematikkunskap behöver detta diskuteras och utmanas av lärarutbildare och fortbildare även inom dessa friare sammanhang. Det för att öka möjligheterna att utveckla det ömsesidiga fokus som lärare ska ha på innehållet och hur eleverna förstår detta innehåll i fler sammanhang.

7.6 Framtida forskning

Med utgångspunkt i resultat från den här avhandlingens studier (Svensson & Holmqvist, 2021; Lelinge & Svensson, 2020) finns ett fortsatt behov av att beforska hur inslag i lärarutbildning och lärarfortbildning kan bidra till att fördjupa lärares förmåga att analysera matematikkunnande och utforma lärsituationer utifrån detta. Vidare behöver kunskap utvecklas om hur utbildningsinsatser kan utformas för att utveckla lärares förmåga att förstå sambandet mellan undervisningens utformning och vad som blir möjligt att lära. Till exempel behövs en bättre förståelse för hur konstruktion av såväl kontextualiserade som dekontextualiserade matematiska uppgifter påverkar vad som blir möjligt att lära. Att göra detta i kontrollerade och storskaliga studier kan bidra med att skapa goda förutsättningar för att utveckla matematikundervisning från tidig ålder för att förebygga matematiksvårigheter i senare skolår. Denna avhandling ska ses som ett första steg i framtida kunskapsutveckling om hur lärarutbildning och fortbildning kan utvecklas på vetenskaplig grund.

SAMMANFATTNING

Inledning

Inom det matematikdidaktiska forskningsfältet argumenteras för betydelsen av lärarens ämnesspecifika kunskaper (SMK), för att kunna erbjuda eleven lärande i matematik (Skott m.fl., 2018). Ball m.fl. (2008) lyfter och fördjupar Shulmans (1986) idéer om betydelsen av både ämnesspecifika kunskaper (content knowledge), ämnesdidaktiska kunskaper (pedagogical content knowledge) för lärare, där det senare ska förstås i relation till ämne, årskurs samt övriga ämneskursplaner men även till elevernas förståelse av innehållet (knowledge of content and students KCS). Det är därför betydelsefullt att belysa hur lärares ämneskunskaper, såväl som ämnesdidaktiska kunskaper i relation till matematiskt kunnande, kan utvecklas. Det ökade fokus på SMK som tidigare studier framhäver betydelsen av, har inneburit argument för ökat ämnesinnehållsfokus inom lärarutbildning och fortbildningsinsatser.

Shulman (1986) menar att utbildning för lärare och blivande lärare kan baseras på dilemman (fallstudier) som dokumenterats i praktiken. Att utgå från fallstudier som dokumenterats av andra skiljer sig från lärares egna önskemål om vilken form de vill att fortbildningsinsatser ska anta (OECD, 2019). Trots det bedrivs det få studier som fokuserar denna form av professionsutveckling för lärare, vilket erbjuder att tillsammans få feedback på den egna undervisningen av skolledare, kollegor och andra externa personer. Modeller som både belyser lärares professionsutveckling som baseras på kollaborativa samtal och elevens matematiklärande lyfts dock fram och studeras i olika delar av världen (Holmqvist, 2017). När det gäller bli-

vande lärare hävdar Pong och Marton (2005) att det bästa och mest kraftfulla sättet är att försöka utveckla och bidra med verktyg i utbildningen. Ett verktyg i form av teoretiska utgångspunkter, som kan användas både av blivande och verksamma lärare, som hjälper dem att förstå sin verksamhet. Björklund m.fl. (2018) lyfter betydelsen, att med stöd av teoretiska verktyg, identifiera vilket lärande och kunnande som lärarens ämnesdidaktiska val har erbjudit. Det är utifrån ett behov av att utveckla kunskap om hur blivande och verksamma lärare kan utveckla sin kompetens att undervisa i matematik i de tidiga åren, som den här avhandlingens problemområde avgränsats, med intentionen att bidra till god matematikundervisning i förskola och skola genom att utveckla kunskap om lärares professionsutbildning. I denna avhandling är det både lärarutbildare och verksamma lärare som kollaborativt utvecklar sin förståelse för matematikundervisning och lärande i sina respektive verksamheter, genom kollaborativa insatser. I avhandlingen ingår fyra studier, och det som är gemensamt för samtliga ingående fyra studier är ett fokus på professionsutveckling för blivande och verksamma lärare som ska undervisa matematik i de yngre åren. Vilket har föranlett följande syfte och ställda frågeställning för kappan.

Avhandlingens syfte och frågeställning

Avhandlingens syfte är att bidra med kunskap om hur kollaborativ undervisningsutvecklande professionsutbildning kan utveckla blivande och verksamma lärares syn på och förståelse för yngre elevers lärande i matematik och undervisningens betydelse för att stödja deras lärande. Kappans övergripande frågeställning är:

Vilka inslag i professionsutveckling för blivande och verksamma lärare i matematik bidrar till att de utvecklar en förändrad syn på och förståelse för elevers kunnande och lärande genom matematikundervisning?

Teoretisk inramning

Det teoretiska ramverk som använts som ansats, variationsteorin, bidrar till att lyfta fram det som haft betydelse för lärares förmåga att upptäcka och synliggöra aspekter som är avgörande för att iscensätta undervisning i relation till elevernas matematikkunnande. Det sker genom att lärandeobjektets behandling studeras i respektive studie, dels avseende den undervis-

ning som erbjuds lärarna/lärarstudenterna, dels den undervisning som lärarna studerar i videosekvenser som ingår i professionsutvecklingsinsatserna. Lärandeobjektet i undervisningen av blivande och verksamma lärare (och därmed i fokus för lärarutbildarna) är deras ämnesdidaktiska professionsutveckling, medan lärandeobjekten i videosekvenser som lärarna analyserar eller lektioner som de genomför utgörs av lärandeobjekt av matematiska inslag som barn och elever ska utveckla kunskap om. Variationsteorin syftar till att studera sambandet mellan undervisning och lärande i studien. Perspektivet studerar hur undervisningsinnehållet erbjuds den lärande att urskilja, gällande likheter och skillnader avseende de aspekter som innehållet består av. Det har med stöd av variationsteorins antaganden studerats i tre av de fyra olika utbildningssammanhangen i föreliggande studie samt i den övergripande syntesen av studierna.

Metodologi

Studiernas design (1-4) utgår både från kvalitativa och kvantitativa metoder, med utgångspunkt i de professionsutvecklande modellerna Lesson study och Learning study (Holmqvist, 2011). Kunskapsmätningar i form av för- och eftertest bidrar tillsammans med data renderade från kollaborativa samtal, gruppdiskussioner, lektionsobservationer och skriftliga noteringar till analysen. Dessa resultat utgör indikatorer för att belysa om lärares professionsutbildning lett till förändring avseende undervisningens kvalitet. Den övergripande analysen i kappan följer en progressionslogik, vilket innebär att varje studies resultat har sammanställts var för sig, och avslutats med en syntes av de ingående studiernas resultat. Syntesen grundas i variationsteoretiska antaganden. Det innebär att aspekter framträder genom att studera inslagens behandling för att utveckla lärares förståelse av vilket matematikkunnande undervisningen erbjuder barn och elever att utveckla. Aspekter som framträder (förskola och skola) i relation till former av matematikkunnande (procedurell och konceptuell) i respektive kontexter. Det innebär att likheter och skillnader kan belysas, genom en abduktiv ansats, mellan de respektive kontexterna förskola och skola, samt dimensionerna lärarutbildning och lärarfortbildning.

Första studien i den här avhandlingen studerade hur videor med didaktiska inslag kan användas av lärarutbildare för att identifiera förskollärar-

studenters förmåga att känna igen barns utforskande av matematik i förskolan. Ett test konstruerades och användes vid tre mättillfällen under genomförande av en obligatorisk matematikkurs inom förskolläraryrket. Testet bestod av elva videodokumenterade lärotillfällen i förskolan med didaktiska inslag. Dessa lärotillfällen var både organiserade och spontana som yrkesverksamma förskollärare dokumenterat i sin verksamhet baserat på Bishops (1988) sex matematiska aktiviteter. Det matematiska innehållet (Bishop, 1988) och undervisning om detsamma i förskolan fördjupades och diskuterades tillsammans med lärarutbildare under kollaborativa lärandeformer med grupper av lärarstudenter inom kursens ram. Baserat på variationsteorin (Marton & Pong, 2005) syftade analysen till att studera förskolläraryrket studenternas uttryckta förmåga att identifiera intentionellt lärandeobjekt gällande barns utforskande av matematiskt innehåll före, under och efter kursen. Analysenheten bestod av utsagor från 358 förskolläraryrket studenter (fördelade vid tre mättillfällen) som valde att skriftligt svara under det visade testet. De fick se samma test före, under och två veckor efter kursen.

I den andra studien studerades förskollärares urskiljning av barns matematiska kunskapsutveckling under lekaktiviteter i förskolan och förskollärarnas möjligheter att urskilja barnens matematiska kunnande. Studien fokuserar på förskollärarnas förmåga att utveckla barns lärande med utgångspunkt i de egendokumenterade matematikaktiviteter i fria leksituationer. Det innebär att studien studerar undervisningsutvecklande professionsutveckling med utgångspunkt i det kollaborativa lärandet. Analysenheten bestod av två utvalda egendokumenterade lärsituationer av två deltagande förskollärare. I analysförfarandet användes variationsteoretiska antaganden. Analysen styrdes av teorins antaganden om att lärande innebär en kvalitativt utvecklad förmåga att urskilja aspekter av fenomenet som inte tidigare har identifierats (Holmqvist & Selin, 2019), vilket i den här studien utgjordes av matematiska aspekter i aktiviteten leka.

Den tredje studien utgjordes av en Learning study som genomfördes av lärarutbildare och studerade lärarstudenters utvecklade kompetens att utforska årskurs 6 elevers kunskaper avseende området medelvärde (statistik). Ett för- och eftertest konstruerades av lärarutbildarna och forskare, som erbjöd summativa och formativa bedömningsmöjligheter. Lärarstudenternas analys utgjorde studiens för- och eftertest. För att bidra med ny

kunskap om förhållandet mellan lärarstudenters innehållskunskap och deras förmåga att förstå elevernas innehållskunskap ur ett didaktiskt perspektiv, genomfördes denna studie med lärarstudenter som analyserade elevernas resonemang om medelvärde. Totalt genomfördes fem forskningslektioner, vardera en i fem olika lärarstudentgrupper från grundläroprogrammet årskurs 4–6. Totalt deltog 64 lärarstudenter i de fem olika grupperna, samt ett forskarteam bestående av forskare och lärarutbildare.

Den fjärde studien syftade till att bidra med kunskap om hur lärares medvetenhet och förståelse för nödvändiga förutsättningar för att förbättra elevernas förmåga att urskilja två- och tredimensionella geometriska objekt utvecklades under kollaborativa samtalsformer. Lärarna som ingår i studien är inte legitimerade matematiklärare, däremot är en deltagare legitimerad bildlärare för årskurs 1-9. Studien genomfördes i en årskurs 4 med 14 elever och ingår i ett större professionsutvecklande projekt vid den aktuella skolan, där fler forskare ingått i andra delar av projektet. Analysen baserades på en kvalitativ ansats, där skolelevers resultat användes som indikatorer för att förstå huruvida lärarnas professionsutveckling också leder till kunskapsutveckling hos eleverna (två- och tredimensionella objekt). Utöver det analyserades lärarnas förmåga att utforma undervisning genom ljudinspelningarna som transkriberades och analyserades separat av båda forskarna för att öka giltigheten och trovärdigheten av analysen. Lärarnas uttryckta behov av förändringar i undervisningsdesignen, utifrån lärarnas förståelse av elevernas kunskaper, har i analysen relaterats till elevernas uttryckta förståelse i testen.

Resultat

Avhandlingens övergripande syfte är att bidra med kunskap om hur kollaborativ undervisningsutvecklande professionsutbildning kan utveckla blivande och verksamma lärares syn på och förståelse för yngre elevers lärande i matematik och undervisningens betydelse för att stödja deras lärande. Det framträder flera generella aspekter i de ingående fyra studierna i den här avhandlingen. Behovet av fördjupade ämneskunskaper (CK), kollaborativa samtalsformer baserade på ämnesteorier och/eller lärandeteorier. Det innebär att i samtliga fyra studier sker en förändring avseende de blivande lärarnas och lärarnas förändrade fokus genom de professionsutvecklande modellerna Lesson study och Learning study, där de initialt

främst urskiljer och uttrycker aspekter som handlar om procedurellt matematikkunnande, till att rikta ett fokus mot det konceptuella matematikkunandet efter utbildningsinsatserna.

I första studien urskiljs kursens inslag av ämnesteoretiska begrepp utgörande av Bishops sex matematiska aktiviteter som betydande för förskollärarnas skiftade fokus på vad barnen gör, till vad de utforskar som matematiskt innehåll. En kritisk aspekt urskiljs för blivande förskollärare, att utveckla sin förståelse för matematikundervisning i förskolan, i vad som kan vara matematiskt innehåll och i synnerhet att ändra fokus från det procedurella till det konceptuella perspektivet.

I den andra studien baseras den förändrade förståelsen hos yrkesverksamma förskollärare på de fördjupade ämnesteoretiska kunskaperna som erbjuds som fortbildningsinslag. Den matematiska aktiviteten lekas tre komponenter (modellera, abstrahera och hypotetiskt tänkande), erbjuds att urskiljas i det material förskollärarna bidragit med i den kollaborativa fortbildningsinsatsen. Förskollärarna observerade i sina egendokumenterade lekobservationer hur vissa barn lämnade leken, vilket urskildes som kritisk aspekt för utveckling av matematikkunnande i förhållande till abstraktionsförmåga. Det som är nödvändiga aspekter för utveckling av verksamma förskollärares förståelse av barns matematikkunnande är förmåga att dels urskilja barnens kunnande, men även att urskilja innehållsmässiga aspekter nödvändiga för att förstå detta kunnande.

Genom att erbjuda lärarstudenterna fördjupad kunskap om det matematiska innehållet (medelvärde), i den tredje studien, ökade möjligheter för grundlärarstudenterna att urskilja elevers förståelse av detsamma. Att bara berätta om medelvärde räckte inte för den här lärarstudentgruppen. Det innebar att forskarteamet i sin undervisningsdesign, som baserades på variationsteoretiska antaganden, konstruerade inslag (uppgifter) med tillhörande aktiviteter i undervisningen som erbjöd lärarstudenterna att urskilja vad som var innehållsmässiga kritiska aspekter. I sin tur möjliggjorde det att lärarstudenterna kunde urskilja elevernas matematiska innehållskunskap i de videoklipp (för- och eftertest) de analyserade kollaborativt.

Fortbildningsinsatsen (studie 4) för de verksamma grundlärarna baserades på kollaborativa samtalsformer, där lärare och forskare tillsammans deltog, bidrog till lärarnas förmåga att urskilja elevernas förståelse av innehållet och på vilket sätt undervisningens design kan bidra till att utveckla denna förståelse. I studien, liksom i studien av verksamma förskollärare,

har de ingående lärarna ett samtidigt fokus på de innehållsmässiga aspekterna och elevernas kunskande.

För att utveckla blivande och verksamma lärares förmåga att undervisa i matematik krävs ett större fokus på hur barns och elevers matematikkunskande kan förstås och utvecklas (KCS). Studierna visar att det krävs goda ämneskunskaper, och goda kunskaper om hur ett innehåll kan erbjudas genom undervisningsinsatser. Detta är aspekter som är en utmaning för lärarutbildare, det vill säga hur man på bästa sätt utformar undervisning som bidrar till att blivande och verksamma lärare utvecklar denna förmåga. Lärarna utvecklar indirekt sina egna matematiska kunskaper genom att studera barnens och elevernas matematiska förståelse (KCS). När det gäller blivande förskollärare och grundlärare, det vill säga studenter i lärarutbildningen, urskiljs aspekter gällande behovet av att uppmärksamma lärarstudenternas innehållskunskaper (CK) i relation till vad de förväntas beakta avseende barn och elevers innehållskunskap. Till skillnad mot de yrkesverksamma, som utvecklar och fördjupar sina egna innehållskunskaper i samband med att de urskiljer samt utvecklar barn och elevers innehållskunskaper (KCS) genom samarbetsprocesser, behöver blivande lärare särskilt erbjudas att utveckla sin förståelse av barns och elevers kunskapsutveckling i matematik.

Slutsats och diskussion

Genom fördjupad teoretisk medvetenhet kan lärare utmana sin förståelse för vilken design som främjar olika former av matematisk kunskap (Björklund m.fl., 2018). Detta framträder i den här studien, betydelsen av att basera de kollaborativa samtalsformerna på ämnesteorier och/eller lärandeteorier för att öka möjligheterna för konceptuellt matematikkunskande både i förskola och skola. Learning study-modellen (Holmqvist, 2011) och variationsteorin bidrog som betydande inslag för forskarteamet i den tredje studien (Svensson & Holmqvist, 2021) att identifiera lärarstudenternas för- och efterkunskaper i förhållande till intentionellt och iscensatt lärandeobjekt (Marton & Pang, 2005).

Såväl lärare som lärarstudenter i förskolan visade i större utsträckning svårigheter att identifiera barns informella kunskapsutveckling, samt svårighet att identifiera lärandets innehåll. Därav betydelse av att i profess-

ionsutbildning inneha ett delat fokus på innehåll och den lärandes förståelse av detta innehåll för att öka möjligheterna, både för yrkesverksamma lärare och lärarstudenter, att utveckla matematiskt kunnande. Det innebär att MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) utifrån den här studiens resultat behöver beaktas i större utsträckning inom olika utbildningssammanhang och mer specifikt inom lärarutbildningen mot de yngre åldrarna. Att enbart erbjuda matematisk innehållskunskap (CK) visade sig inte vara tillräckligt för att bidra till lärares didaktiska utveckling i den här studien. Den komponent i MKT som tycks vara helt avgörande utifrån denna avhandlings resultat, och därmed kritisk, i undervisning och fortbildning av verksamma lärare, tycks vara komponenten ”knowledge of content and student”, KCS (Ball, Thames & Phelps, 2008), det vill säga det ömsesidiga fokus som lärare ska ha på innehållet och hur eleverna förstår detta innehåll (student content knowledge). En skillnad urskiljs mellan blivande lärare och verksamma lärare, där de förra har ett större fokus på innehållet medan de verksamma har ett tydligare delat fokus på innehåll och barns och elevers kunskaper. Den skillnad som finns mellan förskola och skola är att innehållet är tydligare definierat i skolan än i förskolan, vilket ställer särskilda krav på utbildningen för att identifiera barns tidiga matematikutveckling, det vill säga förmågor som behöver utvecklas innan barn formellt räknar och opererar med tal.

SUMMARY

Introduction

In the mathematics didactic research field, it is argued for the importance of the teacher's subject-matter knowledge (SMK) in order to be able to offer the student learning in mathematics (Skott et al., 2018). Ball et al. (2008) highlight and deepen Shulman's (1986) ideas about the importance of both subject-matter knowledge (content knowledge) and subject didactic knowledge (pedagogical content knowledge) for teachers, where the latter is to be understood in relation to the subject, year and other subject syllabi, but also to students' knowledge of content and students (KCS). Therefore, it is important to study how teachers' subject knowledge and subject didactic knowledge can be developed in relation to mathematical knowledge. The increased focus on SMK, which previous studies emphasize the importance of, has highlighted arguments for increased focus on subject content in teacher education and professional development.

Shulman (1986) believes that training for teachers and pre-service teachers can be based on the dilemmas (case studies) documented in practice. Documented case studies by others differ from teachers' own wishes about what form they want to reflect in their professional development (OECD, 2019). Despite this, few studies have conducted focus on this form of professional development for teachers, which offers to get feedback on their own teaching from school leaders, colleagues and other external people. However, models that shed light on teachers' professional development based on collaborative conversations and students' mathematics learning are highlighted and studied in different parts of the world (Holmqvist, 2017). When it comes to pre-service teachers, Pong and Marton (2005)

argue that the best and most powerful way is to develop and contribute tools in education. A tool in the form of theoretical starting points, which can be used by both pre-service and active teachers can help them to understand their activities. Björklund et al. (2018) emphasize the importance of, with the support of theoretical tools, identifying the learning and knowledge that the teacher's subject didactic choice has offered. It is based on a need to develop knowledge about how pre-service and active teachers can develop their competence to teach mathematics in the early years, as the problem area of this dissertation has been delimited, with the intention of contributing to good mathematics teaching in preschool and school by developing knowledge about teachers' professional development. In this dissertation, both teacher educators and active teachers collaboratively develop their understanding of mathematics teaching and learning in their respective activities through collaborative efforts. The dissertation includes four studies, and what is common to all four studies is a focus on professional development for pre-service and active teachers who will teach mathematics in their younger years. This has given rise to the following purpose and question for this research study.

Aim and research question

The purpose of the dissertation is to study how collaborative professional teaching development for pre-service and active teachers of mathematics in the younger years develop their view and understanding of what mathematics knowledge teaching offers children and students to help them develop. The study's overall question is:

What elements of professional development for pre-service and active teachers of mathematics contribute to them developing a changed view of and understanding of students' knowledge and learning through mathematics teaching?

The study object in this study is teachers' / teacher students' professional development in relation to students' / children's learning. The study object is how the didactic elements within the four areas of professional teaching development can be understood and contribute to knowledge about how education and training for teachers can be designed to better contribute to opportunities for children's and students developed mathematical knowledge. To identify any similarities and differences between different

educational contexts, four have been selected. Of these, two teacher education contexts (preschool teacher and primary school teacher education) and two contexts for active teachers (preschool and primary school) were chosen. These are described in more detail in each part.

Theoretical framework

The theoretical framework used, variation theory, helps to highlight what has been important for teachers' abilities to discover and make visible aspects that are crucial for staging teaching in relation to students' mathematical knowledge. This is done by studying the object of the learning treatment in each study, partly regarding the teaching offered to the teachers/ pre-service teachers and partly the teaching that the teachers' study in video sequences included in professional development initiatives. The object of learning in the teaching of pre-service and active teachers (and thus in focus for the teacher educators) is their subject didactic professional development. In contrast, the object of learnings in video sequences that the teachers analyse consist of the object of learnings of mathematical elements that children and students must develop knowledge about. Variation theory aims to study the connection between teaching and learning. In this study, the perspective studies how the teaching content is offered to the learner to discern the current similarities and differences regarding the content's aspects. Based on the assumptions of variation theory, it has been studied in three of the four different educational contexts in the present study and in the overall synthesis of the studies.

Methodology

The design of the studies (1-4) is based on both qualitative and quantitative methods, based on the professional development models Lesson study and learning study (Holmqvist, 2011). Knowledge measurements in the form of pre- and post-tests and data rendered from collaborative conversations, group discussions, lesson observations, and written notes contribute to the analysis. These results are indicators that will help shed light on whether teachers' professional development has led to a change in the quality of teaching. The overall analysis in the theses follows a progression logic, which means that the results of each study have been compiled separately and concluded with a synthesis of the results of the in-depth studies. The

synthesis is based on variation-theoretical assumptions. It involves a description of the aspects that emerge as crucial for developing teachers' understanding of what mathematics knowledge teaching offers children and students to develop. Aspects that appear in the respective contexts (preschool and school) in relation to forms of mathematical knowledge (procedural and conceptual). This means that similarities and differences can be highlighted, through an abductive approach, between the respective context preschool and school and the dimensions of teacher education and teacher training.

The first study in this dissertation studied how teacher educators can use videos with didactic elements to identify the pre-service preschool teachers' ability to recognize children's exploration of mathematics in preschool. A test was designed and used on three measurement occasions to implement a compulsory mathematics course in the preschool teacher programme. The test consisted of eleven video-documented learning opportunities in preschool with didactic elements. These teaching sessions were organized, and spontaneous, as professional preschool teachers documented in their activities based on Bishop's (1988) six mathematical activities. The mathematical content (Bishop, 1988) and teaching about the same in preschool were deepened and discussed with teacher educators during collaborative forms of learning with groups of the pre-service preschool teachers within the course framework. Based on variation theory (Marton & Pang, 2005), the analysis aimed to study the pre-service preschool teachers' expressed ability to identify intentional learning objects regarding children's exploration of mathematical content before, during and after the course. The unit of analysis consisted of statements from total 358 pre-service preschool teachers who chose to answer in writing during the test shown. They could see the same test before, during and two weeks after the course.

In the second study, preschool teachers' discernment of children's mathematical knowledge development during play activities in preschool and the preschool teachers' opportunities to discern children's mathematical knowledge were studied. The study focuses on preschool teachers' abilities to develop children's learning based on the self-documented mathematics activities in free play situations. This means that the studies covering teaching development and professional development based on collaborative learning. The unit of analysis consisted of two selected self-documented

learning situations by two participating preschool teachers. Variation theoretical assumptions were used in the analysis procedure. The analysis was guided by the theory's assumptions that learning involves a qualitatively developed ability to discern aspects of the phenomenon that have not been previously identified (Holmqvist & Selin, 2019), which in this study consisted of mathematical aspects in the activity of playing.

The third study consisted of a learning study conducted by teacher educators and studied pre-service teachers' developed competence to explore grade 6 students' knowledge regarding the area of mean value (statistics). Pre- and post-tests were constructed by teacher educators and researchers, who offered summative and formative assessment possibilities. The teacher students' analysis constituted the study's pre- and post-test. To contribute new knowledge about the relationship between teacher students' content knowledge and their ability to understand students' content knowledge from a didactic perspective, this study was conducted with teacher students who analysed students' reasoning about mean value. A total of five research lessons were conducted, each in five different teacher-student groups from the basic teacher programme grade 4-6. A total of 64 teacher students participated in the five different groups and a research team consisting of researchers and teacher educators.

The fourth study aimed to contribute knowledge about how teachers' awareness and understanding of the necessary conditions for improving students' abilities to distinguish two- and three-dimensional geometric shapes developed during collaborative forms of conversation. The teachers included in the study are not educated mathematics teachers, however, one participant is an educated art teacher for grades 1-9. The study was carried out in a year 4 group with 14 students and is part of a larger professional development project at the current school, where more researchers were involved in other parts of the project. The analysis was based on a qualitative approach, where school students' results were used as indicators to understand whether teachers' professional development also leads to knowledge development in students (two- and three-dimensional shapes). In addition, teachers' ability to design their teaching was analysed through audio recordings transcribed and analysed separately by both researchers to increase the validity and credibility of the analysis. Teachers expressed

need for changes in the teaching design, based on the teachers' understanding of students' knowledge, in the analysis has been related to students' expressed understanding in the test.

Result

The overall purpose of the dissertation is to study how collaborative professional teaching developing education for pre-service and active teachers of mathematics in the younger years develops their view and understanding of what mathematical knowledge teaching offers children and students to develop. In order to contribute to the overall knowledge of professional education for pre-service and active teachers, it is that which contributes to their developed understanding of children's and students' mathematical knowledge and why four studies have been conducted.

In the first study, the course's elements of subject-theoretical concepts consisting of Bishop's six mathematical activities are distinguished as significant for the pre-service preschool teachers' shifted focus to what the children do: what they explore as mathematical content. A critical aspect is distinguished for pre-service preschool teachers to develop their understanding of mathematics teaching in preschool, in what can be mathematical content and, in particular, change focus from the procedural to the conceptual perspective.

In the second study, the changed understanding of vocational preschool teachers is based on the in-depth subject theoretical knowledge that is offered as continuing education elements. The mathematical activity playing based on the three components (modelling, abstracting and hypothetical thinking), is offered to be distinguished from the material preschool teachers have contributed to the collaborative continuing education effort. In their self-documented play, the preschool teachers observed how some children left the play – which was distinguished as a critical aspect for the development of mathematical knowledge in relation to the ability to abstract – to identify the substantive aspects necessary to understand this knowledge.

By offering the pre-service teachers' in-depth knowledge of the mathematical content (mean value), opportunities increased for them to distinguish pupils' understanding of the same (in study 3). Simply telling the pre-service teacher about the mean value was not enough for this group of

students. This meant that the research team in their teaching design, which was based on theoretical variation assumptions, constructed elements (tasks) with associated activities that offered the pre-service teachers to discern the content-critical aspects. In turn, this made it possible for pre-service teachers to discern pupils' mathematical content knowledge in the videos (pre- and post-tests) they analysed collaboratively.

Professional teaching development for the active primary teachers, in study four, was based on collaborative forms of conversation. Teachers and researchers participated together, contributing to the teachers' ability to discern students' understanding of the content and how the teaching design can contribute to developing this understanding. As in the study of active preschool teachers, the incoming teachers have a simultaneous focus on the content aspects and the students' knowledge.

Several general aspects emerge in the four studies included in this dissertation. The need for in-depth subject knowledge (CK). collaborative forms of conversation based on subject theories and/ or learning theories. This means that in all four studies, there is a change regarding the prospective teachers' and teachers' changed focus through the professional development models lesson study and learning study, where they initially mainly distinguish and express aspects that deal with procedural mathematics knowledge, to focus on the conceptual mathematics knowledge after the educational efforts.

In order to develop the ability of pre-service and active teachers to teach mathematics, a greater focus is required on how children's and students' mathematical knowledge can be understood and developed (KCS). The studies show that good subject knowledge is required as well as good knowledge of how content can be offered through teaching initiatives. These are aspects that are a challenge for teacher educators, i.e., how to best design teaching that contributes to pre-service and active teachers developing this ability. Teachers indirectly develop their own mathematical knowledge by studying children's and students' mathematical understanding (KCS). With regarding to pre-service preschool teachers and pre-service teachers, i.e., students in teacher education, aspects concerning the need to pay attention to teacher students' content knowledge (CK) are distinguished in relation to what they are expected to consider regarding children's and students' content knowledge. Unlike the active teachers, who

develop and deepen their own content knowledge in connection with distinguishing and developing children's and students' content knowledge (KCS) through collaborative processes, prospective teachers need to be offered special training to develop their understanding of children's and students' knowledge development in mathematics.

Conclusion and discussion

Professional development based on collaborative forms initiated on participants' self-formulated problem areas in relation to in-depth knowledge of subject theories/ learning theories contributes to pre-service and active teachers changing their understanding of mathematics knowledge and teaching in preschool and primary school (Holmqvist, 2017). Through in-depth theoretical awareness, teachers can challenge their understanding of which design process promotes different forms of mathematical knowledge (Björklund et al., 2018). Emerging in this study is the importance of basing the collaborative forms of conversation on subject theories and/ or learning theories in order to increase the possibilities for conceptual mathematics knowledge in both preschool and school. The learning study model (Holmqvist, 2011) and variation theory contributed as significant elements for the research team in the third study (Svensson & Holmqvist, 2021) to identify the pre-service teacher students' prior and subsequent knowledge in relation to intentional and enacted object of learning (Marton & Pang, 2005).

Both teachers and pre-service teachers in preschool showed, to a greater extent, difficulty in identifying children's informal knowledge development, as well as difficulty in identifying the content of learning. Hence, the importance of having a shared focus on content in professional development and the learner's understanding of this content increases the opportunities for professional teachers and teacher students to develop mathematical knowledge. This means that MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008), based on the results of this study, needs to be considered to a greater extent in different educational contexts and, more specifically, in teacher education towards the younger ages. Offering mathematical content knowledge (CK) alone did not prove to be sufficient to contribute to teachers' didactic development in this study. The component in MKT that seems to be decisive based on the results of this dissertation, and thus critical, in teaching

and further training of active teachers, seems to be the component “knowledge of content and student”, KCS (Ball, Thames & Phelps, 2008). That is, the mutual focus that teachers should have on the content and how the students understand this content (student content knowledge). A difference is distinguished between pre-service teachers and active teachers, where the former has a greater focus on the content while the active ones have a clearer shared focus on content and children’s and students’ knowledge. The difference between preschool and school is that the content is more clearly defined in school than in preschool, which places special demands on education to identify children’s early mathematical development, i.e., abilities that need to be developed before children formally count and operate with numbers.

REFERENSER

- Alkhede, M., (2021). *Aritmetik i förskolan - en studie om taluppfattningens betydelse*. Licentiatavhandling. Göteborgs universitet .
- Alvesson, M., & Sköldberg, K. (2017). Reflexive methodology: *New vistas for qualitative research*. Sage.
- Alrø, H., & Johnsen-Høines, M. (2010). Critical dialogue in mathematics education. In *Critical mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-21). Brill Sense.
- Askew, M. (2008). Mathematical discipline knowledge requirements for prospective primary teachers, and the structure and teaching approaches of programmes designed to develop that knowledge. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 13-35). Rotterdam: Sense Publishers.
- Ball, D., & Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession* (pp. 3-32). Jossey-Bass Education Series.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Baxter, J. A., Woodward, J., & Olson, D. (2005). Writing in mathematics: An alternative form of communication for academically low-achieving students. *Learning Disabilities Research & Practice*, 20(2), 119-135.
- Beach, D., & Player-Koro, C. (2012). Authoritative knowledge in initial teacher education: Studying the role of textbooks through two ethnographic studies of mathematics teacher education. *Journal of Education for teaching: International research and pedagogy*, 38, 115-125.
- Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2010). Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet [elektronisk resurs]: Grundskolan våren 2009. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

- Bieda, K. N., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2014). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, 71-80.
- Biesta, G. (2011). *God utbildning i mätningens tidevarv*. Stockholm: Liber.
- Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19(2), 179 - 191.
- Bjuland, R., Luiza Cestari, M., Bjuland, R., Luiza Cestari, M., & Borgersen, H. E. (2008). The Interplay Between Gesture and Discourse as Mediating Devices in Collaborative Mathematical Reasoning: A Multimodal Approach. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 271-292.
- Björklund, C., & Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 359-377.
- Björklund Boistrup, L. (2010). Assessment discourses in mathematics classrooms: a multimodal social semiotic study. Diss. Stockholm: Stockholms universitet
- Björklund, C., Samuelsson, I. P., & Reis, M. (2018). Om nödvändigheten av undervisning i förskolan—Exemplet matematik. *BARN-Forskning om barn og barndom i Norden*, 36(3-4), 21-37.
- Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frederikberg: Frydenlund.
- Boesen, J., Lithner, J. & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 89–105. doi:10.1007/s10649-010-9242-9
- Boesen, Jesper., Helenius, Ola., Bergqvist, Ewa., Bergqvist, Tomas., Lithner, Johan., Palm, Torulf. & Palmberg, Björn. (2014) Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *Journal of Mathematical Behavior* 33 (2014) 72–87.
- Bonghanoy, G. B., Sagpang, A. P., Alejan Jr, R. A., & Rellon, L. R. (2019). Transformative Professional Development for Mathematics Teachers. *Journal on Mathematics Education*, 10(2), 289-302.
- Carlgren, I. (2012). The Learning Study as an approach for 'clinical' subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(2), 126-139.
- Carlgren, I. (2013). *Kunnande-kunskap-kunnighet*. I L. Lars, L. Viveca, & P. Astrid (Red.), *Pedagogisk bedömning: om att dokumentera, bedöma och utveckla kunskap* (3 uppl.). Stockholm: Liber.
- Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(4), 237-243.
- Chen, C. L., & Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 285-307.

- Christersson, C. (2018). *Forska tillsammans: samverkan för lärande och förbättring*. Stockholm: Norstedts juridik. (SOU, 2018:19)
- Clarke, D. (2007). Ten key principles from research for the professional development of mathematics teachers. In *Stepping Stones for the 21st Century* (pp. 27-39). Brill Sense.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464).
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of mathematics teacher education*, 14(2), 133-148.
- Clewell, B. C., Cohen, C. C. d., Campbell, P. B. & Perlman, L. (2005). Review of evaluation studies of mathematics and science curricula and professional development models. Washington, DC: Urban Institute.
- Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R. and Schauble, L. (2003), “Design experiments in educational research”, *Educational Researcher*, Vol. 32 No. 1, pp. 9-13, doi: 10.3102/0013189X032001009.
- Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 6-33.
- Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American mathematical monthly*, 104(9), 801-823.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.
- Cohrssen, C., Church, A., & Tayler, C. (2016). Play-based mathematics activities as a resource for changing educator attitudes and practice. *SAGE Open*, 6(2), 2158244016649010.
- Cooney, T. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 163–187.
- Creswell, J. W. (2014). Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (4 uppl.). Los Angeles: SAGE.
- Danniels, E., & Pyle, A. (2018). Defining play-based learning. *Encyclopedia on early childhood development*, 1–5.
- Darling-Hammond, L & Richardson, N. (2009). How Teachers Learn. *Research Review / Teacher Learning: What Matters?* 66(5), 46-53.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38(3), 181-199.

- Doig, B., & Groves, S. (2011). Japanese lesson study: Teacher professional development through communities of inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 77–93.
- Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2011). Early mathematics in the pre-school context. In Pramling & Pramling Samuelsson. (Eds.), *Educational encounters: Nordic studies in early childhood didactics*. Dordrecht, the Netherlands: Springer.
- Doverborg, E., & Pramling Samuelsson, I. (1999). Förskolebarn i matematikens värld.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Ds 2009: 21. Globaliseringsrådet. Bortom krisen. Om ett framgångsrikt Sverige.
- Ebby, C. (2000). Learning to teach mathematics differently: The interaction between coursework and fieldwork for preservice teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 69–97.
- Elias, C. L., & Berk, L. E. (2002). Self-regulation in young children: Is there a role for sociodramatic play?. *Early childhood research quarterly*, 17(2), 216–238.
- Elliott, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(2), 108-125. doi:10.1108/20468251211224163
- Emanuelsson, J. (2001). En fråga om frågor: hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap.
- Eriksson, K., Helenius, O., & Ryve, A. (2019). Using TIMSS items to evaluate the effectiveness of different instructional practices. *Instructional Science*, 47(1), 1-18.
- Felton-Koestler, M. D. (2017). Mathematics education as sociopolitical: prospective teachers' views of the What, Who, and How. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(1), 49-74.
- Fisher, K. R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N., & Golinkoff, R. M. (2013). Taking shape: Supporting preschoolers' acquisition of geometric knowledge through guided play. *Child development*, 84(6), 1872-1878.
- Florin, C. (2010). Lärarnas professionalisering. *Lärarnas historia*.
- Fredriksson, H., Norén, N., & Bråting, K. (2021). A pre-study of grade 6 students' orientation to social and sociomathematical norms during mathematical problem solving in groups. In *MADIF 12* (pp. 21-30). Svensk förening för MatematikDidaktisk Forskning-SMDF
- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44(1-2), 43-74.

- Gardner, R. B., & Kamran, N. (1993). Characteristics and the geometry of hyperbolic equations in the plane. *Journal of Differential Equations*, 104(1), 60-116. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1993.1064>
- Gardner, D.C. (2011). Characteristic collaborative processes in school-university partnerships. *Planning & Changing*, 42(1/2), 63–86.
- Garfield, J. B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., & Zieffler, A. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice* (No. Sirsi) i9781402083822). New York: Springer.
- Gellert, U. (2000). Mathematics instruction in safe space: Prospective elementary teachers' views of mathematics education. *Journal of mathematics teacher education*, 3(3), 251-270.
- Ghafouri, F., & Wien, C. A. (2005). “Give us a privacy”: Play and social literacy in young children. *Journal of Research in Childhood Education*, 19(4), 279–291.
- Gibson, J. J., & Gibson, E. J. (1955). Perceptual learning: Differentiation or enrichment?. *Psychological review*, 62(1), 32.
- Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Boyd, J. S. (2008). Mathematics education for young children: What is it and how to promote it. *Social Policy Report*, 12(1), 3-23.
- Goldsmith, L. T., Doerr, H. M., & Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(1), 5–36. <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-013-9245-4>
- Goodlad, J.I. (1991). School–university partnerships: Fundamental concepts. *School of Education Review*, 3(2), 36–42.
- Goulding, M., Rowland, T., & Barber, P. (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal*, 28(5), 689-704.
- Gravemeijer, K. and van Eerde, D. (2009), “Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education”, *The Elementary School Journal*, Vol. 109 No. 5, pp. 510-524, doi: 10.1086/596999.
- Güven, N. D., & Dede, Y. (2017). Examining social and sociomathematical norms in different classroom microcultures: Mathematics teacher education perspective. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 17(1).
- Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 363-375. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0664-9>

- Harris, K. R., Lane, K. L., Graham, S., Driscoll, S. A., Sandmel, K., Brindle, M., & Schatschneider, C. (2012). Practice-based professional development for self-regulated strategies development in writing: A randomized controlled study. *Journal of Teacher Education*, 63(2), 103–119. <http://dx.doi.org/10.1177/0022487111429005>
- Hattie, J. (2013). *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*, Routledge, London.
- Helenius, O. (2018). Explicating professional modes of action for teaching pre-school mathematics. *Research in Mathematics Education*, 20(2), 183-199.
- Helenius, O., Johansson, M., Lange, T., Meaney, T., Riesbeck, E. & Wernberg, A. (2014). Bishop's 6 activities: Changing preschool teachers' mathematical awareness. In *Development of mathematics teaching: Design, Scale, Effects: Proceedings from Madif9: The Ninth Swedish Mathematics Education Research Seminar, Umeå, February 4-5, 2014*.
- Helenius, O., Johansson, M. L., Lange, T., Meaney, T., Riesbeck, E. & Wernberg, A. (2016). What is play as a mathematical activity for preschool children? In T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Eds.), *Mathematics education in the early years – results from the POEM2 conference, 2014* (pp.139–156). New York: Springer
- Hemmi, K., & Ryve, A. (2015). Effective mathematics teaching in Finnish and Swedish teacher education discourses. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 501–521.
- Herro, D, Hirsch, S. E., & Quigley, C. (2019). A faculty-in-residence programme: Enacting practicebased professional development in a STEAM-focused middle school. *Professional Development in Education*, December 2019, 1–17. <https://doi.org/10.1080/19415257.2019.1702579>
- Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5–26). Reston: NCTM
- Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Charlotte: Information Age
- Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J.W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher*, 31(5), 3–15. <https://doi.org/10.3102/0013189X031005003>
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 1–27). Hillsdale: Erlbaum

- Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371–406.
- Hodgen, J., & Askew, M. (2007). Emotion, identity and teacher learning: Becoming a primary mathematics teacher. *Oxford Review of Education*, 33, 469–487.
- Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan: learning study som skolutvecklingsmodell*. Studentlitteratur.
- Holmqvist, M. (2011). Teachers' learning in a learning study. *Instructional science*, 39(4), 497–511.
- Holmqvist, M. (2017), "Models for collaborative professional development for teachers in mathematics", *International Journal for Lesson and Learning studies*, Vol. 6 No. 3, pp. 190–201. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2016-0051>
- Holmqvist, M., Bergentoft, H., & Selin, P. (2018). Teacher researchers creating communities of research practice by the use of a professional development approach. *Teacher Development*, 22(2), 191–209. doi:10.1080/13664530.2017.1385517
- Holmqvist, M., Gustavsson, L., & Wernberg, A. (2007). Generative learning: learning beyond the learning situation. *Educational Action Research*, 15(2), 181–208. doi:10.1080/09650790701314684
- Holmqvist, M., Gustavsson, L., & Wernberg, A. (2008). Variation Theory – An Organizing Principle to Guide Design Research in Education. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Red.), *Handbook of design research methods in education innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (ss. 111–130). New York: Routledge.
- Holmqvist, M., & Mattisson, J. (2008). Variation theory: A tool to analyse and develop learning at school. *Problems of Education in the 21st Century*, 7(7), 31–38.
- Holmqvist, M., & Selin, P. (2019). What makes the difference? An empirical comparison of critical aspects identified in phenomenographic and variation theory analyses. *Palgrave Communications*, 5(1), 1–8.
- Holmqvist Olander, M., & Bergentoft, H. (2014). Theory-based instruction: a key to powerful improvements when learning to regulate body tension in an upper secondary school. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 3(1), 24–45.
- Huang, R., Takahashi, A., & da Ponte, J. P. (2019). *Theory and practice of lesson study in mathematics*. New York: Springer International Publishing.
- Insulander, E., Brehmer, D., & Ryve, A. (2019). Teacher agency in professional development programmes—A case study of professional development material and collegial discussion. *Learning, Culture and Social Interaction*, 23, 100330.

- Johansson, E. (2011). Möten för lärande – Pedagogisk verksamhet för de yngsta barnen i förskolan. En kunskapsöversikt. Skolverket. www.skolverket.se/publikationer?id=2694
- Johansson, M. (2006). Teaching mathematics with textbooks- a classroom and curricular perspective. (Doctoral dissertation, Luleå University, Sweden).
- Johansson, E., & Samuelsson, I. P. (2007). " Att lära är nästan som att leka": lek och lärande i förskola och skola.
- Johansson, M. (2015). *Perceptions of mathematics in preschool: "-Now we have a way of talking about the mathematics that we can work with"* (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet).
- Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., & Turner, L. A. (2007). Toward a Definition of Mixed Methods Research. *Journal of Mixed Methods Research*, 1, 112-133. doi:10.1177/1558689806298224
- Jonsson, A., Williams, P., & Pramling Samuelsson, I. (2017). Undervisningsbegreppet och dess innebörder uttryckta av förskolans lärare. *Forskning om undervisning och lärande*, 5(1), 90-109.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.08.003
- Jurdak, M., & El Mouhayar, R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 75-92.
- Kaufmann O., & Ryve A. (2019) Construction of teachers' roles in collegial discussions. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. fhal-02422564f
- Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The Elementary School Journal*, 102(1), 59–80.
- KILHAMN, C., & SKODRAS, C. (2018). Questioning questions–revisiting teacher questioning practices. *Perspectives on professional development of mathematics teachers*, 181.
- Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, 47(1), 101-116.
- Klahr, D. (2009). " To everything there is a season, and a time to every purpose under the heavens": What about direct instruction? In S. Tobias & T. M. Duffy (Eds.), *Constructivist instruction: Success or failure?* (p. 291–310). Routledge/Taylor & Francis Group

- Klette, K. (2007). Trends in research on teaching and learning in schools: Didactics meets classroom studies. *European Educational Research Journal*, 6(2), 147-160.
- Klim-Klimaszewska, A., & Nazaruk, S. (2017). The scope of implementation of geometric concepts in selected kindergartens in Poland. *Problems of Education in the 21st Century*, 75(4), 345–353. <http://www.scientiasocialis.lt/pec/node/1072>
- Kullberg, A., Kempe, U. R., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?. *ZDM*, 49(4), 559-569.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordic Studies in Education*, 25(01), 16-35.
- Lave, J. (1993). The practice of learning. In Chaiklin, S., and Lave, J. (eds.), *Understanding Practice: Perspectives on Activity and Context*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Leko, M. L., & Trainor, A. A. (2014). The value of qualitative methods in social validity research. *Remedial and Special Education*, 35(5), 275-286. doi:10.1177/0741932514524002
- Lelinge, B., & Svensson, C. (2020). Teachers' Awareness and Understanding of Students' Content Knowledge of Geometric Shapes. *Problems of Education in the 21st Century*, 78(5), 777–798.
- Lewis, C. (2000). Lesson Study: The Core of Japanese Professional Development.
- Lewis, C. (2002). *A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools.
- Lewis, C. (2009). What is the nature of knowledge development in lesson study? *Educational Action Research*, 17(1), 95-110. <https://doi.org/10.1080/09650790802667477>
- Lewis, C. (2016). Learning to lead, leading to learn: How facilitators learn to lead lesson study. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(4), 527–540. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0753-9>
- Lewis, C., & Tsuchida, I. (1997). Planned educational change in Japan: The case of elementary science instruction. *Journal of Education Policy*, 12(5), 313-331.
- Liljekvist, Y. (2014). *Lärande i matematik: Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper*. (Doktorsavhandling, Karlstads universitet).
- Lindvall, J. (2016). Large-scale professional development and its impact on mathematics instruction: Differences between primary and secondary grades. In *Tenth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, MADIF 10*. Sweden: Karlstad, 26-27 January 2016.

- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Ljung-Djårf, A., & Olander, M. H. (2013). Using learning study to understand preschoolers' learning: Challenges and possibilities. *International Journal of Early Childhood*, 45(1), 77-100.
- Lo, M. L. (2009). The development of the learning study approach in classroom research in Hong Kong. *Educational Research Journal*, 24(1), 165-184.
- Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lo, M. L., & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 7-22. doi:10.1108/20468251211179678
- Lo, M. L., & Pong, W. Y. (2005). *Cartering for Individual Differences: Building on Variation. I Fore Each and Everyone*. Hong Kong: Hong Kong University Press.
- Lo, M. L., Pong, W. Y., & Chik, P. P. M. (2005). *For each and everyone: Catering for individual differences through learning studies* (Vol. 1). Hong Kong University Press.
- Loucks-Horsley, S. and Matsumoto, C. (1999), "Research on professional development for teachers of mathematics and science: the state of the scene", *School Science and Mathematics*, Vol. 99 No. 5, pp. 258-271, doi: 10.1111/j.1949-8594.1999.tb17484.x.
- MacCullough, D. L. (2007). *A study of experts' understanding of arithmetic mean*. The Pennsylvania State University.
- Maier, P. H. (1996, March). Spatial geometry and spatial ability—How to make solid geometry solid. In *Selected papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics* (pp. 63-75).
- Makar, K. (2014). Young children's explorations of average through informal inferential reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 61-78.
- Marrongelle, K., Sztajn, P. & Smith, M. (2013). Scaling up professional development in an era of common state standards. *Journal of Teacher Education*, 64(3), 202-211.
- Marton, F. (1981). Phenomenography—describing conceptions of the world around us. *Instructional science*, 10(2), 177-200.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, N.J.: Erlbaum Associates.
- Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning sciences*, 15(2), 193-220.

- Marton, F., & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Research & Development*, 24(4), 335- 348. doi:10.1080/07294360500284706
- Marton, F. and Tsui, A.B.M. (Eds) (2004), *Classroom Discourse and the Space of Learning*, Lawrence, Mahwah, NJ.
- Marton, F., Tsui, A. B., Chik, P. P., Ko, P. Y., & Lo, M. L. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Routledge.
- Matos, J. F., Powell, A., Sztajn, P., Ejersbø, L., Hovermill, J., & Matos, J. F. (2009). Mathematics teachers' professional development: Processes of learning in and from practice. In *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 167-183). Springer, Boston, MA.
- Meaney, T., Trinick, T. & Fairhall, U. (2012). And That's What You Want to Happen. You Want the Shift in Classroom Practice. In *Collaborating to Meet Language Challenges in Indigenous Mathematics Classrooms* (pp. 249-267). Springer-er Netherlands.
- Newton, P., & Burgess, D. (2016). Exploring types of educational action research: Implications for research validity. In *The Best Available Evidence* (pp. 33-46). Brill Sense.
- Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (2002). In M. Niss & T. Højgaard Jensen(Eds.), *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag
- Nuthall, G. (2004). Relating classroom teaching to student learning: A critical analysis of why research has failed to bridge the theory-practice gap. *Harvard educational review*, 74(3), 273-306.
- Olkun, S. (2003). Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 3(1), 1-10.
- Olsson, J. (2017). GeoGebra, enhancing creative mathematical reasoning (Doctoral dissertation). Umeå university
- Olsson, J., & Teledahl, A. (2018). Feedback to encourage creative reasoning. In *MADIF 11: The eleventh research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, January 23-24, 2018, Karlstad University* (pp. 101-110).
- Organisation for Economic Co-operation and Development (2014), *TALIS 2013 Results: An International Perspective on Teaching and Learning*, OECD Publishing, Paris.
- OECD. 2019. *TALIS 2018 Results (Volume I): Teachers and School Leaders as Lifelong Learners*. Paris: TALIS, OECD Publishing. OECD. 2019.

- Pang, M. F. (2003). Two faces of variation on continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47, 145-156.
- Pang, M. (2006), "The use of learning study to enhance teacher professional learning in Hong Kong", *Teaching Education*, Vol. 17 No. 1, pp. 27-42, doi: 10.1080/10476210500527915.
- Pang, M. F., & Lo, M. L. (2012). Learning study: helping teachers to use theory, develop professionally, and produce new knowledge to be shared. *Instructional Science*, 40(3), 589-606. doi:10.1007/s11251-011-9191-4
- Pang, M. F., & Marton, F. (2003). Beyond 'lesson study': Comparing two ways of facilitating the grasp of some economic concepts. *Instructional Science*, 31(3), 175-194. doi:10.1023/A:1023280619632
- Pang, M. F., & Marton, F. (2005). Learning theory as teaching resource: Enhancing students' understanding of economic concepts. *Instructional science*, 33(2), 159-191.
- Pêna Trapero, N. (2013). Lesson study and practical thinking: A case study in Spain. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(2), 2013, 115–136. <https://doi.org/10.1108/20468251311323379>
- Perry, B., & Dockett, S. (2007). Play and mathematics. Adelaide: *Australian Association of Mathematics Teachers*. Retrieved November,3, 2012.
- Persson, J. (2017). Är vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet i skolan samma sak som vetenskap och beprövad erfarenhet i hälso-och sjukvård?. In *Vetenskap och beprövad erfarenhet-skola*. Lund University.
- Persson, S. (2017). Forskningslitteracitet: en introduktion till att förstå, värdera och använda vetenskaplig kunskap. Forskning i korthet, nr 1 2017, KFSK, FoU-Skola.
- Persson, S (2020). Forskningslitteracitet – att förstå, värdera och använda forskning. I Skolverket (2020). *Att ställa frågor och söka svar. Samarbete för vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet*.
- Philipp, A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257–318). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, 15(1), 1–12, 72.
- Player-Koro, C. (2011). Marginalising students' understanding of mathematics through performative priorities: A Bernsteinian perspective. *Ethnography and Education*, 6, 325–340.
- Presser, A., Clements, M., Ginsburg, H., & Ertle, B. (2015). Big math for little kids: The effectiveness of a preschool and kindergarten mathematics curriculum. *Early education and development*, 26(3), 399–426.

- Pyle, A., DeLuca, C., & Danniels, E. (2017). A scoping review of research on play-based pedagogies in kindergarten education. *Review of Education*, 5(3), 311–351.
- Pyle, A., Poliszczuk, D., & Danniels, E. (2018). The challenges of promoting literacy integration within a play-based learning kindergarten program: Teacher perspectives and implementation. *Journal of research in childhood education*, 32(2), 219–233.
- Regeringskansliet, utbildningsdepartementet, arbetsgrupp (U2010:A), promemoria, 2010-06-24, U2010/4443/S.
- Roskos, K & Christie, J. (2000). Examining the play-literacy interface: A critical review and future directions. *Journal of Early Childhood Literacy*, 1(1), 59–89.
- Rossmann, A. J. (2008). Reasoning about Informal Statistical Inference: One Statistician's View. *Statistics Education Research Journal*, 7(2).
- Rowland, T. (2014) The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education*, 1(3), 15–43. <https://doi.org/10.25749/sis.3705>
- Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. *Research in mathematics education*, 2(1), 3–18.
- Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: A stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 46, 317– 328.
- Runesson, U. (1999). Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll
- Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: A critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge journal of education*, 35(1), 69–87.
- Runesson, U. (2006). What is it possible to learn? On variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian journal of educational research*, 50(4), 397–410. <https://doi.org/10.1080/0305764042000332506>
- Runesson, U. (2015). Pedagogical and learning theories and the improvement and development of lesson and learning studies. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 4(3), 186–193. doi:10.1108/IJLLS-04-2015- 0016
- Runesson, U., & Marton, F. (2002). The object of learning and the space of variation. *What matters*, 19–37.
- Runesson, U., Holmqvist, M., & Marton, F. (2003). *Lärandets pedagogik*. Paper presented at the NFPE, Copenhagen.

- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Building blocks and cognitive building blocks: Playing to know the world mathematically. *American Journal of Play*, 1(3), 313-337.
- Seago, N., Jacobs, J., Driscoll, M., Nikula, J., Matassa, M., & Callahan, P. (2013). Developing teachers' knowledge of a transformations-based approach to geometric similarity. *Mathematics Teacher Educator*, 2(1), 74-85. <https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteaceduc.2.1.0074>
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Sidenvall, J. (2015). *Att lära sig resonera: om elevers möjligheter att lära sig matematiska resonemang*. Licentiatavhandling (sammanfattning) Linköping: Linköpings universitet, 2015. Norrköping.
- Sim, Z. L., & Xu, F. (2017). Learning higher-order generalizations through free play: Evidence from 2-and 3-year-old children. *Developmental psychology*, 53(4), 642.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Skolverket, (2010). *Läroplan för förskolan Lpfö 98*. Reviderad 2010. Stockholm: Fritzes [distributör].
- Skolverket, (2018). *Läroplan för förskolan Lpfö18*. Stockholm: Fritzes [distributör].
- Skolverket. (2018). *Läroplan för grundskola, förskoleklass och fritidshem*. 2011 Reviderad 2018. Stockholm: Norstedts Juridik
- Skott, J., Mosvold, R., Sakonidis, C. (2018): Classroom practice and teachers' knowledge beliefs, and identity. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (eds.): *Developing Research in Mathematics Education. Twenty Years of Communication, Cooperation, and Collaboration in Europe*, (p.162-180). New York: Routledge.
- Smith, M. S. (2001). Practice-based professional development for teachers of mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, U.S.
- Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-318). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 36(5), 404-411. <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=afh&AN=18830665&lang=sv&site=eds-live&scope=site>
- Stenhouse, L. (1981). What counts as research? *British Journal of Educational Studies*, 29(2), 103-114. doi:10.1080/00071005.1981.9973589

- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap. best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. Free Press.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(4), 581–587. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0787-7>
- Stoehr, K. (2015). Building the wall brick by brick: One prospective teacher's experiences with mathematics anxiety. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 119–139.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288
- Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics: An introduction. In *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1* (pp. 1-9). Brill Sense.
- Sullivan, A. L., & Field, S. (2013). Do preschool special education services make a difference in kindergarten reading and mathematics skills?: A propensity score weighting analysis. *Journal of school psychology*, 51(2), 243-260.
- Svensson, C. (2015, February). Preschool teachers' understanding of playing as a mathematical activity. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2003-2009).
- Svensson, C. (2017). Lek som matematisk aktivitet: hur matematiska aktiviteter konstitueras i förskola och förskoleklass och hur de förändras under en kompetensutvecklingsinsats (licentiatuppsats, Malmö högskola).
- Svensson, C., & Holmqvist, M., (2021). Pre-Service Teachers Procedural and Conceptual Understanding of Pupils' Mean Value Knowledge in Grade 6. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 16(3),em0649. <https://doi.org/10.29333/iejme/11067>
- Säljö, R. (2011). Kontext och mänskliga samspel-Ett sociokulturellt perspektiv på lärande. *Utbildning & Demokrati-tidskrift för didaktik och utbildningspolitik*, 20(3), 67-82.
- TALIS 2018 Technical Report. Paris: TALIS, OECD Publishing.
- Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: Maximizing the impact of lesson study. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(4), 513–526. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x>
- Thurstone, L. L. (1950). Some primary abilities in visual thinking. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 94(6), 517–521. American Philosophical Society.
- Timperley, H., Wilson, A., Barrar, H. & Fung, I. (2007). *Teacher professional learning and development: Best evidence synthesis iteration [BES]*. Wellington, NZ: Ministry of Education.

- Timperley, H. (2015). Leading teaching and learning through professional learning. *Australian Educational Leader*, 37(2), 6-9.
- Tracy, S. J. (2010). Qualitative Quality: Eight “Big-Tent” Criteria for Excellent *Qualitative Research*. *Qualitative Inquiry*, 16(10), 837-851. doi:10.1177/1077800410383121
- Tutak, F. A., & Adams, T. L. (2017). A study of geometry content knowledge of elementary preservice teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 7(3), 301-318.
- Utbildningsdepartementet. (2010) Förskola i utveckling – bakgrund till ändringar i förskolans läroplan www.regeringen.se/content/1/c6/15/89/51/20e75aa2.pdf
- Van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. In: J. van den Akker. I *Tools in education and training* (ss. 1-14). Boston: Kluwe Academic.
- van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2008). Young children learn measurement and geometry: *A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Brill.
- Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight. a theory of mathematics education. Academic Press.
- van Oers, B. (2014). The roots of mathematising in young children’s play. In *Early mathematics learning* (pp. 111-123). Springer, New York, NY.
- Van Oers, B., & Duijkers, D. (2013). Teaching in a play-based curriculum: Theory, practice and evidence of developmental education for young children. *Journal of Curriculum Studies*, 45(4), 511-534.
- Vetenskapsrådet. (2017). *Forskningsetiska principer inom humanistisk samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Vogt, F., Hauser, B., Stebler, R., Rechsteiner, K., & Urech, C. (2018). Learning through play—pedagogy and learning outcomes in early childhood mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 589-603.
- Warwick, P., Vrikki, M., Færøyvik Karlsen, A. M., Dudley, P., & Vermunt J. D. (2019). The role of pupil voice as a trigger for teacher learning in Lesson Study professional groups. *Cambridge Journal of Education*, 49(4), 435–455. <https://doi.org/10.1080/0305764X.2018.1556606>
- Wayne, A. J., Yoon, K. S., Zhu, P., Cronen, S. & Garet, M. S. (2008). Experimenting with teacher professional development: Motives and methods. *Educational Researcher*, 37(8), 469-479.
- Weisberg, D. S., Hirsh-Pasek, K., & Golinkoff, R. M. (2013). Guided play: Where curricular goals meet a playful pedagogy. *Mind, Brain, and Education*, 7(2), 104-112.
- Wenger, E. (2000). Communities of practice and social learning systems. *Organization*, 7(2), 225-246. doi:10.1177/135050840072002

- Wickstrom, H., Pyle, A., & DeLuca, C. (2019). Does theory translate into practice? An observational study of current mathematics pedagogies in play-based kindergarten. *Early Childhood Education Journal*, 47(3), 287–295.
- White, G. (2003). Standardized mathematics scores as a prerequisite for a first programming course. *Mathematics and Computer Education*, 37(1), 96.
- Williams, P., & Sheridan, S. (2018). Förskollärarkompetens–Skärningspunkt i undervisningens kvalitet. *BARN-Forskning om barn og barndom i Norden*, 36(3-4), 127-146.
- Wilson, K. M., & Swanson, H. L. (2001). Are mathematics disabilities due to a domain-general or a domain-specific working memory deficit? *Journal of Learning Disabilities*, 34(3), 237–248. <https://doi.org/10.1177/002221940103400304>
- Wolf, M. M. (1978). Social validity: the case for subjective measurement or how applied behavior analysis is finding its heart 1. *Journal of applied behavior analysis*, 11(2), 203-214.
- Wood, E. 2009. “Conceptualising a pedagogy of play: International perspectives from theory, policy and practice.” In *From Children to Red Hatters: Divers Images and Issues of Play*, 8, 166–190. Lanham: edited by D. Kuschner University Press of America Inc.
- Wood, K. (2019). The path of teachers’ learning through lesson and learning studies. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 9(2), 93–99. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2019-0083>
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 390–408.
- Yoshida, M. (1999). *Lesson study: A case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Ph.D. Dissertation, The University of Chicago, Illinois, Chicago.
- Zippert, E. L., Eason, S. H., Marshall, S., & Ramani, G. B. (2019). Preschool children's math exploration during play with peers. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 65, 101072.

BILAGA 1

Samförstånds- och medgivandeblankett

Information om studien

Hej!

Under kommande kurs kommer ett forskningsprojekt tillsammans med er att genomföras där utmaningar inom matematikinnehållet är utgångspunkter i forskningsprojektet.

Det övergripande syftet med studien är att synliggöra hur ökad förståelse om matematiska aktiviteter kan bidra till ny kunskap om matematikinnehållet i skola, utveckling och lärande i allmänhet och i synnerhet för 4-6 lärare.

Följande forskare som kommer att delta i detta projekt; xx; doktorand; xx universitetslektor; xx professor; xx universitetsadjunkt,

Din medverkan i studien kan bl.a. innebära att delta med att göra för- och eftertest, reflektioner utifrån kursens uppgifter, bli filmade och inspelade under ett antal seminarier.

Ditt deltagande är helt frivilligt och sker inom utbildningens ram. Du kan välja att avbryta deltagandet när som helst under studiens genomförande om du så skulle önska.

Genom att skriva under det här dokumentet lämnar du ditt medgivande till att:

- Du har givits full insyn i syftet med studien. Forskaren har rätt till dina data till dess att den har använts i en akademisk publikation eller presentation.

- Du förstår att data rapporteras anonymt, men att studiens data under sällsynta omständigheter genom svensk lagstiftning kan medföra att den presenteras till andra forskare som vill undersöka eventuella avvikelser.
- Du förstår att jag anonymt kommer att samla in skriftliga texter, material utifrån inspelade seminarium och muntliga utsagor som kommer att användas i forskningsprojektets syfte.

Du som student kan vara säker på att ditt deltagande inte kommer att användas ur ett bedömningsförfarande i kursen.

Datum

Ort

Namnteckning

Namnförtydligande

BILAGA 2

Under kommande kurs kommer ett forskningsprojekt tillsammans med er att genomföras där utmaningar inom matematikinnehållet är utgångspunkter i forskningsprojektet.

Det övergripande syftet med studien är att synliggöra hur ökad förståelse om matematiska aktiviteter kan bidra till ny kunskap om hur matematikinnehållet i förskola förstås.

Genom att svara på de ställda frågorna i samband med visande av de videodokumenterade matematiksituationerna lämnar du ditt medgivande till att:

- Du har givits full insyn i syftet med studien. Forskaren har rätt till dina data till dess att den har använts i en akademisk publikation eller presentation.
- Du förstår att data rapporteras anonymt, men att studiens data under sällsynta omständigheter genom svensk lagstiftning kan medföra att den presenteras till andra forskare som vill undersöka eventuella avvikelser.
- Du förstår att jag anonymt kommer att samla in skriftliga texter som kommer att användas i forskningsprojektets syfte.
- Du som student kan vara säker på att ditt deltagande inte kommer att användas ur ett bedömningsförfarande i kursen.

BILAGA 3

Informationsbrev till vårdnadshavare och elever om studie

Information om forskningsstudie

Mellan oktober 2017 och september 2019 pågår ett forsknings- och skol-utvecklingsarbete på skolan, där lärarnas frågor och utmaningar är utgångspunkter. Det övergripande målet med forskningsstudien är att utveckla lärarnas undervisningspraktik.

- Forskningsprojekt: Barns förståelse av olika geometriska figurer; kub, kon, sfär, rätblock i årskurs 4.
- Ändamål: Spridning av kunskaper och lärande av nedanstående studieobjekt
- Doktorand: xx
- Forskningsledare: xx

Information om studien

Den planerade studien syftar till att undersöka barns lärande och kunskaper av olika geometriska figurer samt att undersöka vilken begreppsuppfattning och ordförråd elever har gällande två- och tredimensionella objekt/former; hur de ser ut, vad de heter och hur dem kan användas i bildskapande vid tre tillfällen: före, direkt efter och ca sex veckor efter en undervisningsinsats (i ett s k delayed-post test). Tester består av åtta två- och tredimensionella objekt/former som eleverna namnger. Undervisningsmodellen som lärarna arbetar med heter Learning study. Den känne-

tecknas av att en grupp lärare tillsammans med forskare arbetar med planering – genomförande – utvärdering – revidering av ett lärandeobjekt i ett cykliskt förlopp. I de flesta fall begränsas undervisningen till att omfatta en lektion. I studien ingår att observera elevers lärande, vilket görs genom klassrumsanteckningar samt förtest, eftertest och ett eftertest ca fyra-sex veckor efter den genomförda lektionen. Dokumentation används inte i annat syfte än vid forskning och i utbildningssammanhang, och kommer att raderas efter projektets slut. Lektionerna (två i varje deltagande klass) kommer att analyseras av forskare för att se vilken undervisning som ger eleverna bäst möjligheter till lärande. Efter projektet kommer de klasser som inte deltog i den mest utvecklade lektionen att få undervisning på samma sätt. Resultaten kommer att publiceras i vetenskapliga tidskrifter och i populärvetenskapliga sammanhang för att utveckla lärarstudenters och lärares undervisningskompetens. Eleverna kommer att behandlas anonymt. Om ni inte vill att ert barn deltar behöver ni inte ange varför, och det kommer inte heller att påverka elevens fortsatta undervisning eller lärande. Om ni har frågor om studien kan ni vända er till klasslärare xx eller doktorand xx. Ni har alltid rätt att besluta ifall ni vill att era data ska förstöras. Allt som sker inom studiens ram följer Vetenskapsrådets riktlinjer 'God forskningssed'.

BILAGA 4

Till föräldrar och elever 2018-01-19

Hej!

Mitt namn är xx och jag är universitetslektor vid xx universitet. Under detta år, 2018, kommer jag att bedriva ett forskningsprojekt tillsammans med xx professor; xx universitetsadjunkt i matematikdidaktik, xx; doktorand samt universitetsadjunkt i matematikdidaktik.

Syftet med projektet är att förbättra undervisningen i statistik på lärarutbildningen.

Den 23:e januari kommer xx till klassen för att undersöka elevernas resonemang i statistik. Elevers medverkan i studien innebär att de deltar med att göra en del uppgifter enskilt och sedan i grupp där de blir filmade och inspelade. Dessa filmer och skriftliga texter kommer sedan att användas som underlag i kurserna, som nämnts ovan, där studenterna kommer att arbeta först enskilt och sedan i grupp kring elevernas resonemang vid två tillfällen. Första tillfället är innan undervisning skett i statistik och andra tillfället är efter att undervisningen skett. Detta underlag kommer sedan att användas av oss lärare som oerhört väsentligt material för att vi ska kunna utvärdera och förbättra vår undervisning i statistik.

Deltagande är helt frivilligt och eleverna kan välja att avbryta deltagandet när som helst under studiens genomförande om så önskas.

Genom att skriva under det här dokumentet (se nästa sida) lämnar ni medgivande till att:

- Ni har givits full insyn i syftet med studien. Forskaren har rätt till datan till dess att den har använts i en akademisk publikation eller presentation.
- Ni förstår att data rapporteras anonymt, men att studiens data under

sällsynta omständigheter genom svensk lagstiftning kan medföra att den presenteras till andra forskare som vill undersöka eventuella avvikelser.

- Ni förstår att xx anonymt kommer att samla in skriftliga texter ifrån elever samt material utifrån inspelade gruppaktiviteter som kommer att användas i forskningsprojektets syfte.

Datum: _____

Elevens namn: _____

Underskrift av elev _____

Underskrift av målsmän:

1 _____

2 _____

Namnförtydligande:

1 _____

2 _____

BILAGA 5

Till berörda målsmän

Vi arbetar som matematikutvecklare på XX (forsknings- och utvecklingsenheten inom barn och ungdom). Under ett år kommer vi att bedriva en kompetensutveckling ”Matematiklyftet” för lärare i förskola och förskoleklass. Kompetensutvecklingen bygger på Skolverkets material inom det så kallade ”Matematiklyftet för förskola och förskoleklass”.

Vi kommer att arbeta med utgångspunkt från ett kollegialt lärande vilket innebär att dokumentation blir en viktig del i arbetet. I dokumentationen ingår att deltagarna fotograferar och filmar barnens matematiska aktiviteter ute i verksamheten.

Vi vill därför be om ert tillstånd att få visa dessa bilder och filmsnuttar (ca 2–3 min) vid våra träffar i ”Matematiklyftet” samt i forsknings- och undervisningssyfte.

På bilder och filmer kommer barnen att vara anonyma, vilket innebär att inga namn på barn eller förskola/förskoleklasser kommer att publiceras.

Naturligtvis kan ni när som helst ta del av de bilder/filmer där ert barn förekommer.

Har ni några frågor är ni välkomna att höra av er till oss.

Med vänliga hälsningar

xx

xx

III

Pre-Service Teachers' Procedural and Conceptual Understanding of Pupils' Mean Value Knowledge in Grade 6

Christina Svensson¹ , Mona Holmqvist^{1*}

¹ Malmö University, SWEDEN

*Corresponding Author: mona.holmqvist@mau.se

Citation: Svensson, C., & Holmqvist, M. (2021). Pre-Service Teachers' Procedural and Conceptual Understanding of Pupils' Mean Value Knowledge in Grade 6. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0649. <https://doi.org/10.29333/iejme/11067>

ARTICLE INFO

Received: 7 Jan. 2021

Accepted: 2 May 2021

ABSTRACT

The aim of this study is to explore pre-service teachers' procedural and conceptual understanding of pupils' understanding of mean value, before and after an intervention. Participants are 66 pre-service teachers, and two teacher educators. The data consists of five video-recorded lessons and pre-service teachers' pre- and post-test discussions. Based on variation theory, the analysis aimed to identify pre-service teachers' expressed knowledge of procedural and conceptual understanding, focusing four categories of expressions: procedural (P), procedural didactics (PD), conceptual (C), and conceptual didactics (CD). The pre-service teachers' expressed understanding of pupils' knowledge developed differently in the five teacher student groups. A shift from procedural to conceptual focus occurred in two groups. The number of procedural related words expressed in the first group decreased from 104 (pre-test: 65 P and 39 PD) to 16 (post-test: 9 P and 7 PD), at the same time as the conceptual related words increased (pre 4 C and 0 CD and post 11 C and 16 CD). In the second group, 87 procedure-related words (36 P and 51 PD) identified during pre-test decreased after the intervention (3 P and 9 PD). Instead, concept-related words increased from 16 (12 C and 4 CD) to 29 (10 C and 19 CD). The changes occurred among participants who had got, except of theoretical instruction, challenging hands-on tasks about the Mathematical content in focus. The findings from this study contribute to understand how design of instruction for pre-service teacher contributes to enhance teacher students' didactic perspective on pupils' learning.

Keywords: conceptual knowledge, mean value, pre-service teacher education, procedural knowledge, variation theory

INTRODUCTION

Studies in the field of mathematic didactics have reported a correlation between teachers' didactic subject-related knowledge and the quality of their teaching (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Although instructional methods in pre-service education are thought to influence pupils' learning outcomes, few studies have explored their development (Skott et al., 2018). The development of effective instructional methods requires teachers' capabilities for evaluating pupils' knowledge and using this information to design lessons. However, in some cases, the focus has been more on methodological or procedural issues than the focus on what is needed to learn a specific content. Some previous studies have examined pre-service and in-service teachers' skills for teaching specific content. Rowland (2014), and Skott et al. (2018) examined how teachers' knowledge develops and influences practice and suggested action steps for professional teachers. They argued that the focus has been on general didactic skills, with relatively little interest shown in how content knowledge (CK) can be taught in specific subject fields (Skott et al., 2018).

Studies have indicated that CK, which influences teaching skills, is weak. Goulding et al. (2002), who investigated primary teachers' mathematical knowledge, found that teachers demonstrated inadequate knowledge and limited planning and teaching skills. Moreover, Rowland et al. (2000) found that pre-service teachers who lacked mathematical CK also demonstrated weak teaching performance. They noted that "a high proportion of students scoring poorly on the audit do indeed fall within the weak teaching practice category" (Rowland et al., 2000, p. 10).

Teachers' CK for teaching mathematics has been found to impact on pupils' test results even at a very elementary stage in the first grade (Hill, Rowland, & Ball 2005). Moreover, the findings of Tutak and Adams' (2017) study indicate that pre-service teachers who lack geometric content knowledge can enhance their skills by teaching with pupils. A growing number of studies have highlighted the importance of subject mathematical knowledge (SMK) (Scots et al., 2018), thus supporting the view that subject CK should be augmented within teacher education programs.

In this study, the focus is on conceptual and procedural mathematical knowledge. Conceptual knowledge is a form of knowledge that is based on rich information- relationships that are connected in networks where both informal and formal pieces

of information are essential to identify (Hiebert & Lefevre, 1986). Procedural knowledge is based on a person's ability to become familiar with mathematical symbols and conventions. Simultaneously, rules and procedures are available for solving mathematical rules regulations and procedures such as algorithms for solving averages (a.a.). Conceptual knowledge, however, does not necessarily have to be based on rich information relations about advanced mathematical understanding. For example, a child may possess conceptual knowledge, less developed than an adult but still considered conceptual knowledge (Star, 2005). The construction of tasks is vital for illuminating, capturing interest, and retaining an interest in optimizing learning to promote conceptual knowledge (Chapman, 2013).

BACKGROUND

Mathematical CK, in this study limited to arithmetic mean value, could imagine being a simple concept because of its form, but it is quite complicated to understand (MacCullough, 2007). Sullivan et al. (2013) argue for representational tasks to enhance conceptual development and understanding of mathematics. However, there are many opportunities for developing conceptual understanding by representative tasks in this topic area in daily society. Tables, diagrams, and arithmetic solutions of different average are common in media and everyday life. The latter, for example, in business stores, where you need CK of calculations and reasoning knowledge about how many shoes in a specific size to be ordered. Further, the need for CK to be able to interpret diagrams for average temperature or interpret diagrams and calculation of averages in falling ill in a pandemic.

This kind of daily mathematical situations give many opportunities contribute to an increased experience and explored statistics. However, it is also a crucial understanding for considering when the mean is a useful measure for different data to be an informed citizen (MacCullough, 2007). The opportunity of real tasks in daily life can be compared to contextualized tasks that engaging and enhance motivation for conceptual knowledge in mathematics (Sullivan et al., 2013). Cobb and Moore (1997) claim that critical for statistical understanding is that "data" sets presented in the tasks are in its context. This because "statistics requires a different kind of thinking, because data are not just numbers, they are numbers with a context" (Cobb and Moore, 1997, p. 801).

A common phrase in statistics education attributed that data are numbers with a context. But in mathematical textbooks, it is common with only numbers without context in this topic area (Liljekvist, 2014). However, understanding of mean value includes both the algorithm for the mathematic arithmetic mean value and the arithmetic mean value as a mathematical point of balance (MacCullough, 2007). The balance between only calculating mean value algorithm and statistical reasoning for developing understanding is claimed for. Therefore, statistic tasks must be about a context to promote statistical reasoning (Cobb & Moore, 1997), and to develop conceptual knowledge requires that the algorithm is related to a context (MacCullough, 2007). Pupils also need to explain their reasoning for creating a more precise mathematically average understanding in the tasks (Maker, 2014), to be able to move from their data to get beyond their classroom context. Therefore, it is also essential to highlight the mathematical content in the context as well as the opposite (Cobb & Yackel, 2011).

If information is limited, e.g., in a diagram, the pupils can use verbal and gestural expressions to compensate for this limitation when they reason (Chen & Herbst, 2012). Burland et al.'s (2000) study of two groups of Grade 6 pupils examined how the gestures related to their use of reasoning strategies according to diagrams, where illustrations were included, played an essential role in developing collaborative mathematical reasoning. Therefore, it is useful to follow the pupils learning process, and in this process observe gestures and informal verbal expressions of the content knowledge (Radford, 2013). This puts demands on having CK for developing pedagogical content knowledge (Ball et al., 2008; Shulman, 1986) as a teacher.

Within higher education, students are expected not only to possess the required content knowledge but also to be prepared for an uncertain future whose knowledge needs are not yet known (Pang & Marton, 2003). Teacher educators try to prepare pre-service teachers to teach the next generation of pupils even though the knowledge requirements cannot be precisely predicted. The provision of tools that can support pre-service teachers in handling new situations within their future professions can facilitate both teachers' and pupils' learning processes (Pang & Marton, 2003).

In some Asian countries, such as Japan, teachers collaboratively develop their knowledge by observing each other's lessons and subsequently share their reflections to enhance the quality of instruction and to facilitate pupils' knowledge development (Holmqvist, 2017). This professional development model, known as lesson study, is widely used and has a long tradition in Japan, beginning in the 19th century. A similar model, known as learning study, has been developed more recently in Sweden and in Hong Kong (Marton, 2015). In this model, teachers follow an outline and engage in collaborative planning of theoretically informed instruction relating to general and subject didactics and in collegial conversations, leading to the revision and re-teaching of lessons. In a learning study, the cycles of activity usually entail cooperation between teachers and researchers (Holmqvist, 2011; Marton, 2014). While this model has been found to be highly effective in developing professional learning (Kullberg et al., 2016), it has mainly been applied in the context of developing pupils' learning in primary and secondary schools. The theory-driven cyclical and iterative process illuminates and encourages the articulation of teachers' own experiences of teaching (Holmqvist, 2011). Teachers can embark on their professional development by systematizing and designing their teaching on the basis of a theoretical understanding rather than implicit decisions (Marton et al., 2004). The structure of the lesson plans reflects collective and cyclical processes for developing an experiential problem (Lewis & Tsuchida, 1997) that is comparable to the structure developed using the lesson study method (Stigler & Hiebert, 1999).

The aim of this study is to explore pre-service teachers' procedural and conceptual understanding of pupils' understanding of mean value, before and after an intervention. The intervention was designed as a learning study, with pre- and post-tests, in which pre-service teachers analyzed pupils' reasoning relating to a defined area of content (mean value) before and after an intervention.

Specifically, the development of pre-service teachers' skills for exploring pupils' mathematical CK relating to the mean value were investigated from a didactic perspective. Based on variation theory, the analysis aimed to identify pre-service teachers' expressed knowledge of procedural and conceptual understanding, focusing four categories of expressions: procedural (P), procedural didactics (PD), conceptual (C), and conceptual didactics (CD).

The following research questions were formulated:

RQ1: What aspects of content knowledge expressed by the pupils, during a video-recorded group discussion about mean value, are critical for their knowledge development?

RQ2: What aspects of the pupils' expressed knowledge were discerned by the pre-service teachers before and after the intervention?

RQ3: What differences, if any, were there in pre-service teachers' understanding of pupils' knowledge before and after the intervention?

THEORETICAL FRAMEWORK

Variation theory, which offers analytical tools for exploring the necessary conditions for learning, has been used as theoretical framework to investigate knowledge development (Marton, 2014). It entails assumptions about learning that can be teaching applied to enhance learners' capabilities to discern aspects of the learning object that have not been previously experienced (Holmqvist & Selin, 2019; Marton, 2014; Marton & Booth, 1997). According to variation theory (Holmqvist, 2011; Lo, 2012; Marton & Booth, 1997), variation enables learning aspects to be discerned on the basis of discerning different aspects of a phenomenon. Through the function of simultaneity, whereby different aspects of the learning object can be discerned at the same time, critical aspects may be rendered visible through their variation. Critical aspects are aspects not yet discerned by the learning, but needed to develop their understanding. Thus, an intervention based on variation theory strives to make these critical aspects to be distinguished. The highlighting of critical aspects for the development of learning results in increased opportunities for all individuals to discern the parts of a particular learning object and the structural relationships of the parts to each other and the whole object (Lo et al., 2006). Lo et al. (2006) emphasized the importance of considering the larger context in the process of making aspects discernable for learners through place-based learning entailing real situations. This context enables learners to identify contrasts among the object of learning and other phenomena, for example, by defining what mean value is by contrasting it against median, or conceptual knowledge contrasted against procedural knowledge. Thus, the theoretical framework can be used to determine the design of an instructional method for pre-service teachers to enhance their own theoretical knowledge of how to understand their own teaching; it can also be used as a research tool to analyze preservice teachers' expressed knowledge before and after an intervention.

According to Holmqvist (2004), variation theory is based on the premise that all learning requires structural pattern of variation related to a learning object. It is not about finding the right or best teaching method or variation relating to the choice of methodology; rather the focus is on variation required for discerning a specific learning object that relates to the learning goals. The pattern of variation (generalization, contrast, fusion) is used in planned instruction to visualize critical moments for learning. These critical moments that occur when individuals notice changes in their understanding of the outside world are the moments when they learn (Holmqvist, 2004).

To recognize differences in pupils' reasoning, pre-service teachers have to study additive and multiplicative relationships along with distributive reasoning. It is assumed that this knowledge will enhance pre-service teachers' focus on not only procedural but also conceptual knowledge, as they increase their own understanding of the mathematical content while simultaneously acquiring an understanding of how to teach this content to their pupils (Shulman, 1986). A second phase during which teacher educators and researchers apply these theoretical assumptions entails attempts to elicit qualitative differences in pre-service teachers' and pupils' expressed knowledge during pre- and post-tests. This can be achieved through the design of tasks, such as those used in the fourth and fifth lessons of this intervention (learning study) for pre-service teachers. The analysis presented here follows the structure developed by Holmqvist and Selin (2019). Accordingly, aspects and features to identify pre-service teachers' expressed knowledge of procedural and conceptual understanding, focusing four categories of expressions: procedural (P), procedural didactics (PD), conceptual (C), and conceptual didactics (CD).

METHOD

The unit of analysis was pre-service teachers' expressed discernment of pupils' understanding of the mean value while solving a task. At the university, the pre-service teachers were watching video-recordings of pupils' problem-solving in group, while taking a course in mathematical didactics. The pre-service teachers were taking the course "Mathematics and learning: number sense, arithmetic and algebra", at the University. The course goal to: "assess pupils' knowledge and knowledge development in number sense, arithmetic and algebra based on the school's governing documents" was focused. To capture changes in the pre-service teachers' skills, the teacher students were video-recorded during their discussions before and after interventions, which were designed in line with Shulman's (1986) recommendation to use case-studies for enhancing teachers' teaching knowledge. In line with these findings, all pre-service teachers' pre- and post-tests included a video-recording of a group of five pupils in grade 6, who first explained, one at a time, how they solved mathematical tasks centering on the mean value. Furthermore, the grade 6 pupils subsequently described how they obtained their answers in a group discussion with other pupils. The video recording was made

Figure 1. The design of the teacher training intervention implemented by teacher educators

Table 1. Pre-service teachers who participated in the study

Group	Program and term	Women	Men	Total
RL 1	4-6 Science/Social Science	21	5	26
RL 2	4-6 Language Swe	7	2	9
RL 3	4-6 Mathematics	8	1	9
RL 4	4-6 Language Swe	6	2	8
RL 5	4-6 Science/Social Science	12	2	14
Total		54	12	66

by one of the teacher educators, who also served as a moderator in the group discussion in a regular class and classroom. At the video, the teacher asked the pupils, both individually and as a group, if they could express the concept of the mean value, and she instructed them to discuss their solutions with each other during the group session (following the procedures of previous research c.f. Bjurland et al., 2000). The video-recorded situation (11 min 26 sec) was presented in pre- and post-tests. The mean value tasks the pupils are working with are derived from the national-level maths test for grade 6 (PRIM, 2020: (<https://www.su.se/primgruppen/matematik/%C3%A5rskurs-6/exempel-ur-tidigare-prov>)).

This statistic task chosen is familiar for pupils in Sweden. Further, the algorithm for mean value is focused initially on procedural knowledge (c.f. Hiebert & Lefevre, 1986), but it turns a form of balance between the algorithm and the context and by that makes it possible to also assess conceptual understanding (MacCullough, 2007). The test aimed to study the pre-service teachers' focus (procedural and conceptual) when commenting on the pupils' knowledge of mean values. They watched the recording twice, just before and after the research lesson. The pre-service students were given the following two questions in both pre- and post tests before they watched the recording:

- What knowledge can be examine of the pupils' mean value knowledge (summative assessment)?
- What learning do you think the pupils have developed and what do they need to develop further (formative assessment)?

The researcher video-recorded the pre-service teachers' group discussions at pre- and post-tests, which were transcribed verbatim and analyzed by the first author. The second author conducted an independent analysis of the material to check for any incongruence. Both authors had access to all of the collected data. The pre-service teachers collaboratively answered the questions orally within smaller groups.

Learning study was used as research method to collect data to study the relation between instruction and learning, by supporting pupils' learning through teachers' enhanced professional development (Brante et al., 2015; Holmqvist, 2011; Marton & Lo, 2007). In this study the learners are pre-service teachers, and the object of learning their skills to analyze pupils' understanding of the concept taught (mean value) from conceptual and procedural perspectives. The group of teachers in this study are teacher educators working collaboratively with the researcher to develop pre-service teachers' learning. The teacher training intervention followed the design presented in **Figure 1**.

Participants. Two teacher educators, one researcher, and a total of 66 pre-service teachers divided into five different groups/class participated in this interventional study. In total five research lessons were designed, one per each teacher student group (G1-G5). Each research lesson lasted two hours. All of the pre-service teachers in the five groups were studying mathematics teaching for pupils in grades 4–6. **Table 1** shows the participants' details.

Ethics. Ethical procedures of informing participants of their rights to refuse to participate and obtaining their verbal and written consent for their voluntary participation were followed. The collected data were anonymized and coded to protect the participants' confidentiality, and the researcher had no teaching or grading role for the pre-service teachers in this study. Furthermore, the data were secured in a safe locker to avoid unauthorized access. The names of the participants and other sensitive data were removed from the stored data.

Data collection. The collected data comprised verbatim transcripts of the video-recorded discussions used for the pre- and post-tests, based on the video-recorded stimuli of pupils' reasoning and discussion about mean value. Data was also collected from each group's research lesson, which means in total five research lessons were video-recorded. Moreover, the data included the researchers' notes taken during their planning discussions and during video-recorded lessons as well as recorded pre- and post-test discussions (in total audio-recorded discussions and 27 video-recorded discussions from 66 pre-service teachers). **Table 2** provides descriptions of the collected data.

Table 2. Collected data

Data	Participants	Number
Notes from planning meetings	Teacher educator and researcher	10
Video-recorded planning meetings	Teacher educator and researcher	2
Pre-test	Pre-service teachers	66
Video-recorded lessons	Pre-service teachers	5
Post-test	Pre-service teachers	66
Video – recorded pre-test	Pre-service teachers	27
Video-recorded post-test	Pre-service teachers	27
Audio-recorded pre and posttest	Pre-service teachers	66

Table 3. The time-line of the research project

Date	Activity		Participants		
	Meeting	Lesson	Tests	Researcher	Teacher educator Pre -service teachers
180119	x			x	x
180131	x			x	x
180215		1	pre/posttest	x	x x
180417	x			x	x
180423	x			x	x
180423		2	pre/post test	x	x x
180516	x			x	x
181003		3	pre/post test	x	x x
181115	x			x	x
181122	x			x	x
190221	x			x	x
190221		4	pre/post test	x	x x
190327	x			x	x
190328	x			x	x
190514		5	pre/post test	x	x x

The study was implemented in Spring 2018 and ended in Spring 2019. **Table 3** presents the time schedule of the research project, encompassing all of the participants and activities that were conducted. All activities took place during the course of the regular teacher education program held at this university. The planning meetings and the analysis of the lessons that were held during the intervention were documented through notes. The meetings held to plan the design of the intervention and to analyze the instructions were video recorded. The transcripts (pre-and posttest) were produced following the intervention's implementation.

Data analysis. The analysis of the lessons was carried out with the support of variation theory (Holmqvist, 2006; Lo, 2013; Marton & Lo, 2017) and determined what aspects could be discerned by pre-service teachers to explore the pupils' knowledge of mean values during the lessons. Moreover, variation theory was applied in the design of hands-on tasks given to the pre-service teachers during their research lesson in groups four and five. The analysis aimed to identify pre-service teachers' expressed knowledge of procedural and conceptual understanding, focusing four categories of expressions: procedural (P), procedural didactics (PD), conceptual (C), and conceptual didactics (CD).

Implementation of the learning study. Each pre-service teacher student group participated in one research lesson. By that, five different iterations were enacted during the learning study intervention. The content of each lesson was analyzed and revised on the basis of the findings of the analysis of the previous research lesson outcome. The lessons were designed to facilitate the identification of differences in pre-service teachers' skills through a comparison of pre- and post-test results. Specifically, correlations between the pre-service teachers' enhanced abilities and what was offered to discern in the different lessons were examined (c.f. Holmqvist, 2004). In the extra supplemental material, the design of each of the lessons. The results of the analysis of the first three lessons had three implications for the fourth and fifth lessons. Accordingly, the following changes in inputs provided to pre-service teachers were made based on the pattern on variation used:

- Median, mean, and mode values should be presented with synchronous simultaneity to force the students to discern all forms and enhance their conceptual focus.
- Hands-on tasks should be offered, designed to simultaneously require a focus on the median, mean, and mode values, while at the same time keeping the numbers constant (**Figures 2 and 3**).
- Contrasts should be used to separate examples from generic principles, e.g., changing the number but keeping the same number for all values (median, mean and mode).

The findings of the analysis of the fourth and fifth teaching designs resulted in the development of the teacher educators' teaching strategies and a method for designing teaching tasks based on variation theory (**Figures 1 and 2**). Teacher educators require a deep understanding of mathematical content combined with a good grasp of how pupils' learning should be understood to enable them to design learning situations, materials, and tasks and to optimize the development of pre-service teachers' knowledge.

In the first task, shown in **Figure 2**, the pre-service teachers had to use the same (invariant) numbers to solve the task in three different ways while simultaneously defining the mean, median, and mode values by applying variation. The pre-service teacher

1. Calculate the mean, median and mode values.
2, 5, 0, 8, 0, 1, 8, 5, 0, 2

Figure 2. The task designed for pre-service teachers to solve in Research lesson 4 and 5

2a. If the mean of 5 numbers is 20, what can the five different numbers be? Describe how you found the answer.
2b. If the median of 5 numbers is 20, what can the different numbers be? Describe how you found the answer.
2c. If the mode value of 5 numbers is 20, what can the different numbers be? Describe how you found the answer.

Figure 3. The task designed for pre-service teachers to solve in research lessons 4 and 5

All pupils in class 6a sold tickets. They did not sell the same amount of lottery tickets each. This is how many tickets the girls in the class sold:

Name	Number of tickets
Maja	11
Samira	8
Nadja	8
Sara	7
Eila	7
Laura	5
Alva	5
Fatima	4
Nellie	3
Wilma	2

- a. What is the mean value of how many lottery tickets the girls sold?
Show how you solve the task. ($60/10=6$)

b. There are 30 pupils in class 6A. The mean value of sold tickets in the class is five.
How many lottery tickets did the pupils (both boys and girls) sell altogether?
Show how you solve the task. ($30 \times 5 = 150$)

c. What is the mean value of how many lottery tickets the boys sold?
Show how you solve the task. ($150 - 60 = 90$)

Figure 4. The individual and group task on mean values that pupils had to solve

students discuss different context related to the different numbers in the tasks. The task was constructed from a variation theory perspective through the different ways while simultaneously defining the averages (Holmqvist, 2004), and related to the need of a context for developing a conceptual knowledge (Cobb & Moore, 1997).

The second task (Figure 3) also entailed variations, but the pattern of variation in this task differed from that in the previous one. Here, the solution (20) was invariant, but the pre-service teachers had to identify the numbers (five in each task) to determine what made 20 the mean, median, and mode values. In contrast to the first task, the numbers in this task varied. In this tasks the focus is on the algorithm, based on MacCullough, (2007) arguments for understanding of mean value include both the algorithm for the mathematic arithmetic mean value and the arithmetic mean value as a mathematical point of balance. The latter was contributing by using the three averages median, type and mode with the solution as invariant simultaneity.

RESULTS

In line with our aim of exploring skill development among pre-service teachers for engaging with pupils' mathematical knowledge, an interventional study was conducted from a didactive perspective, focusing on the mean value before and after testing. The results are presented in the same order as the research questions. The analysis revealed what pre-service teachers discerned regarding the pupils' knowledge expressed in video-recorded discussions that were used for the pre-test and post-test. Subsequently, the pre-service teachers' statements on what they discerned during the pre- and post-test evaluations were analyzed. Lastly, the differences in their discernment before and after the intervention were analyzed.

The pupils' expressed knowledge about mean values. The first question was aimed at identifying aspects of CK expressed by the pupils in the video-recorded sequence that was analyzed by the pre-service teachers during the pre- and post-tests. These aspects, presented in a video clip (a duration of 11 min 26 sec) could be discerned by the pre-service teachers when they analyzed the pupils' reasoning during the next phase of the intervention. During this phase, the analysis centered on pupils solving tasks relating to mean values in the video clip. The pupils (n = 5) were given a problem entailing three tasks to solve individually (one pupil video-recorded at a time) and during group work conducted by the same five pupils. Figure 4 depicts the assigned task.

Table 4. Pupils' solutions and discerned aspects relating to the object of learning (mean value)

Pupil	Solutions	Discerned aspects of mean value	Not yet discerned aspects	Irrelevant aspects misleading understanding
1	a. 6 b. c.	Sum divided by sellers 20 boys $\times$ 5 = 100	-	- - Mean value $\times$ n (boys)
2	a. 60 b. 150 c.	- - 150 - 60 = 90	Division of the sum by the number of sellers	Sum
3	a. 6 b. - c. 4.5	Sum divided by sellers 60 $\times$ 2 (twice as many boys than girls) = 120 Change to 90/20	-	- Proportionality between boys and girls
4	a. 6 b. c.	Sum divided by sellers 20 boys $\times$ 5	-	- - Mean value $\times$ n (boys)
5	a. 6 b. c.	Sum divided by sellers	-	-

Different kinds of knowledge were unveiled in the pupils' statements on their reasons and in their responses that could be discerned by the pre-service teachers and explored during their pre- and post-test discussions. **Table 4** shows the content in pupils' video-recorded explanations and group discussions that could be explored.

The data shown in **Table 4** reveals that the pupils discerned aspects for mean value differently. Pupil 3, for example, was able to discern aspects needed to determine the mean value and had no difficulty solving the three tasks, even though the third solution was not presented in writing on the test sheet.

The pre-service teachers' discernment of pupils' knowledge. The second research question focused on aspects of the pupils' expressed knowledge that were discerned by the pre-service teachers before and after the intervention. A detailed analysis of the teachers' pre- and post-test responses conducted after the third lesson (held in October 2018) revealed weak knowledge development. After the analysis, the designs of the fourth and fifth lessons were changed through the introduction of a task informed by variation theory for the pre-service teachers to solve. In this task, the mean value was contrasted with other types of averages to enable the student teachers to develop their CK (see **Figures 2** and **3**). Accordingly, there was a time gap after the first three lessons, which ended in October 2018. Their content was collectively analyzed by the teacher educators, leading to the redesigning of the fourth and fifth lessons (held in February and March 2019, respectively). The qualitative analysis performed on the pre-service teachers' discussions during the pre-test in lesson 1 revealed that while the teachers talked about the mode average, they did not use this word to express it. Moreover, they did not recognize the mode average, confusing it with the mean in their discussion. Their own difficulties were clearly expressed as they watched the pupils' video-recorded discussions.

Excerpt from the pre-test for lesson 1:

PST4: It is difficult to put the mean value into words.

PST2: Yes, it is.

PST4: I had difficulties with it too.

PST2: Yes.

PST3: Yes.

PST4: Difficult

Three evident knowledge-related challenges were identified in the analysis. First, the pre-service students' discussions focused on the pupils' use of *correct terms and methods* (procedures). This tendency was especially marked in the discussion about the use of the wrong word for addition. Second, the discussions focused on the pupils' use of reading and problem-solving strategies (procedures), as revealed by their use of the term "reading strategies" as well as by their implicit allusions to *more information* connect to the strategies. Third, the pre-service teachers' discussion focused on the methods employed by the teacher (procedures): how the teacher asked the questions and how he or she organized the group discussion. **Table 5** provides examples of the pre-service students' assessment statements.

Table 5. Examples of pre-service teachers' responses in pre- and post-tests relating to lessons one to three

Lesson	Pre-test	Post-test
1	"It bothers me when the pupils use <i>wrong words</i> , such as <i>plus</i> instead of the word <i>addition</i> ."	"One option that he does not know the mean value concept. He <i>adds</i> the numbers and gets the <i>total sum</i> but <i>not</i> the mean value."
2	"It's only about <i>procedures</i> . It is so overall (in school)." "It is difficult to move on. It depends on <i>how the teacher asks the questions</i> ."	"There is a big different between a and c. A has more <i>procedures</i> . In c, the procedure is the same, but you need to <i>have more information</i> ." "(not heard)... through the discussions <i>with the teacher they</i> (pupils in the video) <i>start the reasoning</i> ."
3	"It's about how they interpret and <i>process the information</i> ." " <i>Reading strategies</i> really get you in, and that tells you little about the mathematical competence..."	"There is an <i>understanding</i> , [...] it does not show that he can and if they not had the discussion it would not have come out" "First I thought that she did not understand, but after I had had the opportunity to think more [about this], I had a different understanding about her thinking."

Table 6. Examples of responses obtained during the pre- and post-tests conducted for the fourth lesson

Pre-test	Post-test
"I sat for a long time thinking about what I was counting."	"But there is more. Yes they know and have <i>learned</i> the formula okay. [They will] count it then divide it but they do not know <i>why</i> they count [to] 10."
"Did you also got 4.5 or?" "Yes, but no one there calculated the mean value; [they] did not read the data properly. They only <i>calculated</i> how many lots the boys sold. No one had calculated the mean value."	"Most people have learned how to calculate the mean value if you get all the information. But when information is left out, as mentioned by you, it immediately becomes more difficult."

Table 7. Examples of pre-service teachers' responses in the pre- and post-tests relating to the fifth lesson

Pre-test	Post-test
"I think they know how to calculate the mean value; they have typed in a formula as well, but they do not know what they are doing. None of them could explain why they divide with 10; none of them could explain how they calculated, I think." "I don't really know what I'm doing."	"For the calculation, everyone can—or almost everyone can— calculate the mean value." "Because he was really good here (solved task c but not a and b). So there are different qualities (abilities) ... even if you understand what you are doing but can't figure it out, then you also have no knowledge. I can understand what the mean value is, but if I have no idea how to calculate it. What does it matter? This is hard!"

The results indicated that there were significant changes in the pre-service students' understanding of the implemented procedures after the third lesson. There was a greater focus on content in the post-tests, especially in the third lesson. The teaching designs that followed the first three lessons incorporated their insights and focused on the development of teaching strategies and the design of powerful teaching tasks. These tasks (shown in [Figures 2 and 3](#)) were important for deepening the pre-service teachers' understanding of the mathematical content (shown in [Figures 2 and 3](#)).

There were three notable findings of the analysis of the pre-service teachers' discussions during the pre-test. First, these discussions focused on the pupils' use of *correct terms and methods* (procedures). This emphasis was clearly revealed in the discussion about the application of the wrong word for addition. Second, they focused on the pupils' use of reading and problem-solving's strategies (procedures), as revealed by their use of the term "reading strategies" but also through indirect allusions to highlight the need of *more information*. Third, they focused on the methods employed by the teacher (procedures), notably how the teacher asked questions and guided the reasoning. The results of the analysis revealed significant differences in what the teachers discerned from the pupils' expressed understanding in the post-test discussions.

In light of the modified designs of the fourth and fifth lessons (see extra supplemental material) the teacher educator hypothesized that the pre-service teachers should be offered to discern by design tasks of average value simultaneous ([Figures 2 and 3](#)) increasingly conceptual dimension to a greater extent, as indicated by excerpts from the fourth lesson shown in [Table 6](#).

During lesson four, the pre-service teachers discussed the pupils' understanding of the mean value in the post-tests. They discerned pupils' learning that entailed procedural as well as conceptual understanding. Conceptual understanding was unveiled in comments about what they did not know and why and when information was left out. This finding is notable, as the pre-service teachers also found this task difficult to solve when information was left out during the intervention. One pre-service teacher made the following comment on the last task: "I do not know the numbers of boys" and this lead to no solution. Thus, the pre-service teachers expressed some of the difficulties that the pupils had expressed in the video-recorded discussions in the pre-test and the post-test.

After revising the teaching design of the fifth lesson, including the follow-up questions used (see extra supplemental material), some further changes between the pre-service teachers' discussions in pre- and post-tests were observed ([Table 7](#)). Specifically, discussions about the pupils' learning regarding the mean value now reflected a combination of procedural and conceptual understanding.

There were still comments about the calculation during the pre-test. The pre-service teachers related their own understanding to the pupils' understanding. They continued to discuss the formula in relation to procedures. However, there is a change regarding the pre-service students' expressions after the research lesson in G4. The teacher students in this group focus on pupils'

Table 8. Identified focus areas in pre-service teachers' expressions of pupils' learning: Procedural (P), procedural didactics (PD), conceptual (C), and conceptual didactics (CD)

Definitions of pupils' knowledge by pre-service teachers	RL 1 (n=10)		RL 2 (n=7)		RL 3 (n=7)		RL 4 (n=7)		RL 5 (n=11)	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
	7 m 2 s	7 m 56 s	5 m 41 s	5 m 6 s	7 m 16 s	7 m 22 s	3 m 54 s	4 m 27 s	6 m 23 s	3 m 51 s
Procedural knowledge	92 P 6 PD	56 P 13 PD	38 P 9 PD	23 P 19 PD	33 P 33 PD	17 P 11 PD	65P 39PD	9 P 7 PD	36 P 51 PD	3 P 9 PD
Conceptual knowledge	0 C 0 CD	0 C 0 CD	1 C 0 CD	2 C 0 CD	2 C 1 CD	18 C 1 CD	4 C 0 CD	11 C 16 CD	12 C 4 CD	10 C 19 CD

understanding of being able to represent the content of the assignment with the algorithm for mean. After the research lesson in G5, one pre-service student expresses the need for a balance with both mastering the algorithm but also distinguishing the algorithm as representation in the task. These changes could be connected to how the pre-service teachers talked about the different qualities of the knowledge expressed by the pupils. This shift can be interpreted as reflecting a deeper understanding of the mathematical content. The pre-service teachers talked about necessary abilities for doing the calculation associated with a procedural understanding, but they also referred to the need for a deeper understanding at a conceptual level.

Differences in discernment before and after interventions. The third and last research question was about differences, if any, in pre-service teachers' understanding of pupils' knowledge before and after the intervention. The analysis focused on four distinct categories that were used to differentiate the ways in which pre-service teachers discerned pupils' knowledge. These categories were derived from a theoretical framework used to investigate procedural and conceptual understanding. The P category focused on how pupils solved task general, and the C category applied to their knowledge of the mathematical content in relation to the task and pupils in the video.

Excerpt relating to procedural knowledge:

You are unclear, not just show how you think. I think many times as we have grown up to show how you think, you do it with numbers. Three different calculations.

Excerpt relating to conceptual knowledge:

Then I thought there was a pupil who understood why she should divide.

These categories were divided into two sub-groups to incorporate a didactic perspective on how and whether expressions associated with the categories relate to teaching methods (PD, CD). PD focuses on how to teach in a way that fosters a procedural understanding and CD focuses on how to teach in a way that fosters a conceptual understanding.

Excerpt relating to PD:

One should be able to practice more [to understand] what it means [and] to be able to develop communication and conceptual abilities.

Excerpt relating to CD:

I thought for a while about what it felt like when...their reasoning. It felt like they realized what each speech represents, that is, the number of pupils ... they got a more relational understanding then.

Table 8 presents a summary of the differences between pre-service teachers' expressions relating to their descriptive statements on procedural and conceptual understanding in their pre- and post-tests. The results were qualitatively analyzed in relation to the design of the lessons to develop a deeper understanding of what impacts may have inspired the changes in the pre-service teachers' expressions.

Although there were still comments in the pre-test about the calculation, a clear shift from procedural to conceptual discernment occurred between the third and fifth lessons, with the latter being prominent in the fourth and fifth lessons. The pre-service teachers discussed their own understanding and the pupils' understanding and explored the design of instructional methods for enhancing pupils' knowledge. They also continued to discuss the formula in relation to procedures.

The final lesson (5) revealed changes in the way pre-service teachers talked about different qualities, which can be interpreted as reflecting a deeper understanding of the mathematical content that enabled a formative assessment. The pre-service teachers talked about abilities relating to a procedural understanding that were required for the calculation while also noting the need for a relational understanding. The types of averages that the pre-service teachers focused on were identified, revealing that the discussion primarily centered on mean values. The pre-service teachers had the opportunity to discern the pupils' reasoning about the mean form of averages through their observation of the sequence of video recordings used in the intervention.

As **Table 9** shows, this content the mean of averages was also prominent in the analysis of the content of the teachers' discussion. However, some pre-service teachers still talked about the median and the mode during the fourth and fifth lessons. This finding was analyzed from the perspective of the type of knowledge (conceptual or procedural) they were focusing on (**Table 8**). As shown in **Table 8**, during the two last lessons (fourth and fifth) the student teachers did focus more on C and especially on CD, and their implications for instruction. This finding does not indicate that the pre-service teachers' focus shifted in terms of the widening of knowledge in the different types of averages; rather, their focus shifted from procedural to conceptual knowledge. This intensified focus on what it takes to learn, rather than how pupils solve tasks matched the aim of the intervention.

Table 9. Word counts of expressions relating to different types of averages

Frequency of averages	RL 1 (n=10)		RL 2 (n=7)		RL 3 (n=7)		RL 4 (n=7)		RL 5 (n=11)	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Post	Pre	Post	Pre
	7 m 2 s	7 m 56 s	5 m 41 s	5 m 6 s	7 m 16 s	7 m 2 s	7 m 56 s	5 m 41 s	5 m 6 s	7 m 16 s
Mean	14	10	3	3	17	6	29	15	36	19
Median	0	0	0	0	0	0	4	0	1	0
Mode	0	0	0	0	0	0	5	0	6	0
Total amount of words	1546	1063	598	695	1660	1260	2922	1965	3080	2612
		+31%		+16%		-24%		-33%		-15%
Mean words/student	154	106	85	99	237	180	417	280	280	237

Tables 8 and 9, which depict the results of the analysis of word counts and types of knowledge, reveal a decline in the use of words for all types of averages in all of the lessons, with the exception of the third lesson. Very few words of this type were uttered during this lesson compared with recordings with the same time in the other groups. In the group that participated in lesson five, the same time resulted in 3,080 words, whereas the figure for the group in lesson three was only 695. There was an association between the decreased use of words for averages and the focus of the discussions. As the discussions became more focused on the content and how it was understood by the pupils, references to whether or not the answers on the mean value were correct decreased in the post-tests. The discussion on how pupils' learning could be enhanced through teaching instruction may have resulted in the increased use of words communicating didactical issues.

DISCUSSION

The aim of this study was to explore pre-service teachers' procedural and conceptual understanding of pupils' understanding of mean value, before and after an intervention. To determine how they reasoned about the pupils' learning, a pre-test and a post-test that included pupils' individual and group explanations of how they have solved mathematical tasks, focusing on the mean value, were implemented. The pre-service teachers were offered to discern the confusion expressed by the pupils. However, they found it difficult to determine why the pupils were unable to solve the tasks and why they confused the different kinds of averages in their reasoning during the first three lessons. The offered discernment in the fourth and fifth research lessons subsequently changed through the incorporation of a task in which all of the averages were calculated using the same numbers.

The analysis of the pre-service teachers' expressions in the test situations revealed that they were unsure of how to use the concept of mean value. Even if they understood how to solve the tasks assigned to the pupils, they stated that they did not have a clear idea of what they were doing. The pre-service students' challenges presented during the three first lessons were to distinguish the pupils' difficulties through their reasoning about the algorithm solutions connected to mean value in the task. The pre-service students expressed procedures in general about the concept (addition terms) and reading strategies. The pre-service students did not distinguish the pupils' expressed learning during their analysis of the video-recorded material from pupils' task solving (c.f. Chen & Herbst, 2012), which can be due to the pre-service teachers' own lack of mathematical knowledge. Therefore, in research lessons four and five, hands-on tasks were constructed which offered the pre-service students to develop their own conceptual knowledge about the object of learning (c.f. Maker, 2014). Based on the assumptions of variation theory (Holmqvist, 2004; Marton, 2015), the tasks were constructed for explicit knowledge about the mode, median, and mean value simultaneity, to help the pre-service teachers to separate these modes from each other. In the fourth and fifth research lessons, the pre-service students expressed an explored understanding of the pupil's reasoning about their solutions about the mean value. This could be compared to Sullivan et al.'s (2013) arguments for representational tasks that enhance conceptual development and understanding of mathematics regarding the students. Furthermore, even if tasks are claimed to need to be about a context and contribute to statistical reasoning for developing conceptual knowledge to distinguish the algorithm in a context (Cobb & Moore, 1997; MacCullough, 2007), our results point out that the context might not be needed to be in the focus to make the students discern a concept. Instead, in this study, the pre-service students were needed to explore their understanding of the more precise mathematical knowledge of mean value decontextualized. This included both the algorithm for the mathematic arithmetic mean value and the arithmetic mean value as a mathematical point of balance (cf. MacCullough, 2007).

In their study of primary school teachers, Goudling, Rowland, and Barbers (2002) similarly found that the teachers had inadequate mathematical knowledge. Moreover, this has been found to be the case even for very elementary content (Hill, Rowland, & Ball, 2005). The results of this study confirm this finding, indicating that this factor undermined the pre-service teachers' skills for understanding and exploring what the pupils were doing. Their difficulties in clearly expressing what they saw also made it more difficult for them to share their thoughts with their colleagues within the group. Consequently, their focus was more directed toward the procedures and pupils' activities that they could describe. This finding accords with what we described as procedural knowledge in this study, and by giving the teacher students hands-on tasks to develop their own understanding, this also resulted in a conceptual focus when they studied the pupils' task-solving.

Shulman (1986) recommended the use of case studies, which were applied in the pre- and post-tests in this study. However, because case studies were not used in the lesson, this did not impact on the pre-service teachers' understanding. Instead, a mathematical task on averages was added in the fourth and fifth research lessons, which appeared to have influenced a shift among the pre-service teachers towards a focus on the pupils' conceptual understanding. The desing of the mathematical task that was grounded in variation theoretical assumptions (Marton, 2015), requiring the teachers to work on the three types of averages simultaneously, enabled them to discern what it takes to understand the mean value in contrast to other types of

averages. Related to the video where the five pupils deal with mean value, this resulted in a shift from reasoning about pupils learning in general, a procedural knowledge to a conceptual focus. The pre-service teachers' increased conceptual knowledge enhanced by the lesson design with hands-on tasks helped them to identify the pupils' informal and formal expressed understanding through analyzing the pupils' reasoning. As the tasks were constructed to offer enhanced conceptual knowledge based on rich information-relationship between algorithm, averages, and context (as promoted by c.f. Hiebert & Lefevre, 1986) the pre-service students could identify the pupils' conceptual understanding to a higher degree, in line with previous research (c.f. Chapman, 2013).

Although this study was not aimed at identifying what the teacher educators had learned, it illuminates how the learning study model, with its iterative cycles, was applied in the intervention (Holmqvist, 2011), providing the teacher educators with guiding inputs to produce a more effective teaching design. After conducting three lessons, the team did not observe any differences in the pre-service teachers' skills during their reasoning. However, by practically applying the theoretical framework to construct a task for the pre-service teachers, they contributed to bridging the gap between theory and practice within teacher education. Even if the pre-service teachers understood the theoretical framework, transforming this knowledge into practice, which entailed working with children, did not appear to be possible until they began to think about how to solve tasks relating to averages. The design emphasized the act of contrasting the averages in relation to each other to enable the teachers to discern differences among them. The teachers' confusion encountered in the first three lessons decreased as they developed a clearer understanding of the content and used the correct words for the concepts that they were exploring. That resulted in an increased focus on how to teach to develop conceptual understanding. In other words, the student teachers gained insights into how to teach to develop specific CK beyond merely knowing what to do or what should be known, extending their skills to teaching that enables specific CK to be developed.

LIMITATIONS

Because this study was conducted in one university offering teacher education, the number of participants was limited as the impact on what is offered in the pre-service students' courses is high. Another limitation of the study was that no control group was used to assess whether, and in what way, smaller differences of discernment of CK may have existed between the interventional groups and the controls. Moreover, the choice made to use only the mean value at the inception of the study, instead of averages, was found to be a limitation in the teaching design for the pre-service teachers to understand the development of the pupils' knowledge regarding the mean value. Their understanding of the mean value, in contrast to other averages, was found to enhance their learning. Finally, the theoretical perspective applied in the study may have had a greater impact over a longer duration. However, regular teaching was resumed after the intervention.

Author contributions: All authors have sufficiently contributed to the study, and agreed with the results and conclusions.

Funding: The project has no external funding.

Declaration of interest: The authors do not have any conflicts of interests.

Ethical Declaration: Ethical standards have followed the guidelines from the Swedish Research Council, as well as the principles of Committee on Publication Ethics (COPE). All participants have got information about the aim of the project, how data will be saved, analyzed and presented, as well as that participation is voluntary and that they can cancel their participation whenever they wish.. They have also signed an informed consent.

REFERENCES

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Brante, G., Holmqvist Olander, M., Holmqvist, P. O., & Palla, M. (2015). Theorising teaching and learning: pre-service teachers' theoretical awareness of learning. *European Journal of Teacher Education*, 38(1), 102-118. <https://doi.org/10.1080/02619768.2014.902437>
- Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(4), 237-243. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9247-2>
- Cobb, P., & Yackel, E. (2011). Chapter 4. Introduction. *A journey in mathematics education research—Insights from the work of Paul Cobb*, 33-40. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9729-3_4
- Goulding, M., Rowland, T., & Barber, P. (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal*, 28(5), 689-704. <https://doi.org/10.1080/0141192022000015543a>
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale: Erlbaum.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, 42(2), 371-406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Holmqvist, M. (2004). *En främmande värld: om lärande och autism* [A foreign world: about learning and autism]. Studentlitteratur.
- Holmqvist, M. (2011). Teachers' learning in a learning study. *Instructional science*, 39(4), 497-511. <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edsjrsr&AN=edsjrsr.23882877&lang=sv&site=eds-live&scope=site>

- Holmqvist, M. (2017). Models for collaborative professional development for teachers in mathematics. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(3), 190-201. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2016-0051>
- Holmqvist, M. (Ed.). (2006). Att teoretisera lärandet. [To theorize learning]. In M. Holmqvist (Ed.), *Lärande i skolan: Learning study som skolutvecklingsmodell* [Learning in School: Learning Study as School Development Model] (pp. 9-24). Studentlitteratur.
- Holmqvist, M., & Selin, P. (2019). What makes the difference?: An empirical comparison of critical aspects identified in phenomenographic and variation theory analyses. *Palgrave Communications*, 5, 1-8. <https://doi.org/10.1057/s41599-019-0284-z>
- Kullberg, A., Runesson, U., Marton, F., Vikström, A., Nilsson, P., Mårtensson, P., & Häggström, J. (2016). Teaching one thing at a time or several things together?—Teachers changing their way of handling the object of learning by being engaged in a theory-based professional learning community in mathematics and science. *Teachers and teaching*, 22(6), 745-759. <https://doi.org/10.1080/13540602.2016.1158957>
- Lewis, C., & Tsuchida, I. (1997). Planned educational change in Japan: The case of elementary science instruction. *Journal of Education Policy*, 12(5), 313-331. <https://doi.org/10.1080/0268093970120502>
- Liljekvist, Y. (2014). *Lärande i matematik: Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper*. [About reasoning and the characteristics of mathematical problems] (Doctoral dissertation, Karlstads universitet).
- Lo, L. M., Chik, P., & Pang, M. F. (2006). Patterns of variation in teaching the colour of light to Primary 3 students. *Instructional Science*, 34(1), 1-19. <https://doi.org/10.1007/s11251-005-3348-y>
- Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Routledge.
- Marton, F., & Lo, M. L. (2007). Learning from "The Learning Study". *Tidskrift för Lärarutbildning och Forskning [Journal of Research in Teacher Education]*, 2007(1), 31-44.
- Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. In F. Marton (Ed.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-36). Lawrence Erlbaum Associates Publisher. <https://doi.org/10.4324/9781410609762>
- Pang, M. F., & Marton, F. (2003). Beyond "lesson study": Comparing two ways of facilitating the grasp of some economic concepts. *Instructional Science*, 31(3), 175-194. <https://doi.org/10.1023/A:1023280619632>
- PRIM (2020). Examples of tasks for assessment in mathematics Grade 6. Stockholm University, Department of Mathematics and Didactics. <https://www.su.se/primgruppen/matematik/%C3%A5rskurs-6/exempel-ur-tidigare-prov>
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44. <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1112191&lang=sv&site=eds-live&scope=site>
- Rowland, T. (2014) The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education*, 1(3), 15-43. <https://doi.org/10.25749/sis.3705>
- Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. *Research in Mathematics Education*, 2(1), 3-18. <https://doi.org/10.1080/14794800008520064>
- Shulman, L. (1986) Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Skott, J., Mosvold, R., & Sakonidis, C. (2018): Classroom practice and teachers' knowledge beliefs, and identity. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation, and collaboration in Europe* (pp. 162-180). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315113562-13>
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 36(5), 404-411. <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=afh&AN=18830665&lang=sv&site=eds-live&scope=site>
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Free Press.
- Tutak, F. A., & Adams, T. L. (2017). A study of geometry content knowledge of elementary preservice teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 7(3), 301-318. <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edsdoj&AN=edsdoj.50746d225684271b5eb0766e964675e&lang=sv&site=eds-live&scope=site>

IV

TEACHERS' AWARENESS AND UNDERSTANDING OF STUDENTS' CONTENT KNOWLEDGE OF GEOMETRIC SHAPES

Balli Lelinge, Christina Svensson

Malmö University, Sweden

E-mail: balli.lelinge@mau.se, christina.svensson@mau.se

Abstract

Few research studies have been conducted in a primary school in early mathematical education about the teaching of geometry. This research aims to contribute with knowledge of how teachers' awareness and understanding of necessary conditions to enhance students' abilities to discern two- and three-dimensional shapes develop. In this research, qualitative methods were used to analyse data from a lesson study in grade 4 in the subject of mathematics. Data were primarily collected through audio-recorded conversations with teachers before and after the lesson, and the results of students' pre- and post-test. The results of this research showed increased awareness of using collaboration opportunities to apply professional classroom instructions and activities to enhance students' knowledge of two- and three-dimensional shapes. This research elucidates how the practice-based professional development approach emphasised the teachers' teaching targets for understanding students' content knowledge of geometric shapes. Additionally, the result highlighted teachers' awareness and understanding of the challenges students face in learning about three-dimensional shapes from two-dimensional representations. Future research should develop a more iterative and revised research lesson design to develop more powerful content knowledge and classroom activity in this topic area.

Keywords: *early mathematics education, geometric shapes, practice-based professional development, lesson study*

Introduction

This research identified teachers' awareness and understanding of students' spatial ability in early mathematical education. From a Swedish educational context, there is a great interest in students' mathematical achievements (OECD, 2016). It is assumed that practice-based collaboration between researchers and teachers promotes teachers' teaching methods in relation to the subject of mathematics. Skott et al. (2018) research highlighted the increased importance of the subject matter knowledge in teacher education. That is, however, not enough if the teacher does not understand how to teach in the subject's meaning and links the topic to, for example, everyday life (Ball & Cohen, 1999). Klim-Klimeszwska and Nazaruk (2020) research revealed that kindergarten teachers (150 interviews) did not work systematically with early mathematical education with geometric concepts. The leading critic is linked to the use of the student's potential regarding "geometric intuition, in an effective way" (p. 345).

A mere theoretical understanding of the subject matter does not contribute to conceptual teaching understanding (Ball & Cohen, 1999). Conceptual teaching understanding is based on an understanding of the need to offer the students several representations, such as art constructions, or comparisons with other subjects and contexts, which increase the probability of more in-depth understanding of the whole (Ball & Cohen, 1999, p. 11; Smith, 2001). However, there

are few research studies about teaching in geometry that focus on developing students' spatial ability in primary school. Therefore, this research addressed the importance of contributing to more research in this topic area.

The geometry content of mathematics contributes to developing students' spatial and logical reasoning (French, 2004). Spatial ability is vital in developing understanding of and experiencing the visual world correctly (Gardner, 1993) and is divided into three areas: spatial relations, visualisation, and orientation (Thurstone, 1950). Spatial relations consist of imagining the rotations of two- and three-dimensional objects as a whole body (Olkun, 2003). Spatial visualisation consists of the ability to imagine representing two- and three-dimensional movements in different spaces (Clements & Battista, 1992). Spatial orientation is the ability to distinguish geometric shapes from different positions (Thurstone, 1950) but also to imagine two- and three-dimensional shapes based on different rotations (Maier, 1996). It contributes to a mental spatial understanding in both vertical and horizontal directions. Van Hiele (1986) has identified five levels of mental spatial understanding development. Level 1 consists of visualisation, which means that students experience the most common geometric shapes in standard orientation. Level 2 (analysis) consists of students being able to identify forms based on their characteristics. Level 3 (abstraction) consists of students being able to identify, for example, that a square is a rectangle but not all rectangles are squares. Level 4 (deduction) consists of a developed understanding of the importance of geometric evidence. Finally, in level 5 (rigor), students both understand and think abstractly about the relationships between different geometric concepts.

This research concerned Level 1, and the students' ability to express their learning regarding two- and three-dimensional shapes (circle, square, rectangle, triangle, sphere, cube, cone and cuboid). That is, being able to develop and describe their spatial ability through visualisation and being able to name the mentioned shapes in their standard positions after the research lesson.

Teaching about geometrical content is closely related to the ability to discern visual representations in different forms. Several repetitions of representations are required to develop deeper mathematical knowledge (Duval, 2006). However, Wilson and Swanson (2001) showed that students who have difficulties in mathematics seem to have a harder time preserving visual representations in working memory compared with other students. This can be further discussed in relation to the levels identified by Van Hiele (1986), where Levels 1 and 2 consist of identifying geometric shapes based on representations. In geometry teaching with the support of representations has been found that students who develop the ability to transform (i.e., reasoning between two- and three-dimensional shapes in visual representation) can better handle tasks that are based on similarity to understand that two items can have different scales (Seago et al., 2013).

From the age of 11–12, students transition occurs from concrete operations to more formal ones (Piaget, 1972). This means that they develop an understanding of the relations between different forms, such as two- and three-dimensional shapes, without relying on concrete examples (a.a.). However, it is not easy to build formal mathematical knowledge at a young age because all students need to develop abstract thinking (Piaget, 1972). Hallowell et al. (2015), for example, highlighted in their research how primary school students showed difficulty transforming when curves were involved. Chapman (1997) argued about the importance of organising classroom interaction to provide an opportunity to develop a more formal mathematical language. However, this can only happen with teacher support in the form of new communication strategies containing mathematical concepts, thinking and reasoning (Sfard, 2007). Reasoning with a mathematical register (Halliday, 1981) is an important communication strategy for developing mathematical learning between students and an expert (e.g., the teacher) in a classroom (Sfard, 2007).

Research in mathematics education has highlighted students' misconceptions that, for example, in rotation, a square is not a square unless the base is resting horizontally (Clements & Battista, 1992; Mayberry, 1983). Furthermore, students have difficulty experiencing the properties within the shapes (Mayberry, 1983), such as a square being a form of a rectangle (Marchis, 2008).

More research is needed in the mathematical area of geometry, for clarifying how students are developing their understanding of spatial abilities in the classroom. It is necessary to educate teachers about how to understand students increased learning in two- and three-dimensional shapes. This research addresses the methodological approach practice-based professional development (PBPd) for developing teachers' conceptual teaching and understanding in this topic area.

Practice-based Professional Development

Practice-based professional development (PBPd) research is related to improving school teaching (Ball & Cohen, 1999), and it focuses more on teacher inquiry development than only on teacher knowledge (Harris et al., 2012). According to Ball and Cohen (1999), it is necessary to understand that improving PBPd is about developing teaching-learning as something that is a part of teaching (p. 11). Ball and Cohen argued that this teaching-learning knowledge should not be entirely depending on institutional learning: "Professional development could be substantially improved if we could develop ways to learn and teach about practice in practice" (p. 11). According to Smith (2001), this approach provides teachers with an opportunity to develop new awareness and knowledge (p. 206) about teaching.

The Swedish Government announced that Sweden needs to create a problem-based development research system in which higher education institutions within all school levels must collaborate in equal partnership (Goodlad, 1991; Herro, et al., 2019) to develop learning in school. This direction and statement from the Swedish Government to increase the need for practice-based research emphasised the collaboration between teachers and researchers (Christensson, 2018). By these approaches, the gap between theory and practice is meant to be bridged by involving teachers in the research process and working directly to change and improve classroom practice (Carlgrén, 2005; Swedish Research Council, 2015). According to Christensson (2018), this approach shifts the concept of problem-based development research to teaching-development research. Thus, PBPd research is characterized by a knowledge interest that primarily aims to contribute knowledge about how teaching can be developed and improved, with the aim of promoting student development and learning (cf Ball & Cohen, 1999; Gardner, 2011; Harris et al., 2012). This means that the research must be conducted in direct connection with the teaching. What characterizes these research orientations is that the research is being e.g. iterative, collaborative, process-oriented, and useful in real contexts. By involving teachers and researchers in the research processes, the PBPd research aims to narrow the gap between theory and practice (Ball & Cohen, 1999; Christensson, 2018).

This research direction was inspired by the lesson study model, where teachers' collaborative professional development (CPD) has been the starting point in a previous school development project with a content-oriented approach.

Lesson Study: A Collaborative Professional Development Model

The Lesson Study *Jugyou kenkyuu* (Yoshida, 1999) model offers the teachers a collaborative professional development approach to continuously improve their teaching (Lewis, 2009). Lesson study has been developed in Japan and translated as "lesson study" (hereafter LS) by Stigler and Hiebert (1999). According to Lewis (2002, 2009) LS is a "research

lesson", where the emphasis is on teaching for understanding instead of teaching as telling (Lewis & Tsuchida, 1998). In the past century, LS has been an important path (Wood, 2019) of enhancing teacher learning (Pêna Trapero, 2013) professional development, and triggering changes in teachers' classroom practice (Vrikki et al., 2017; Warwick et al., 2019). LS gives the teachers a great potential to observe the life and processes in the classroom, particularly regarding students' learning capability, which is subsequently collaboratively analysed (Lewis (2009). The research lesson is designed in the teacher group, although it is usually put into practice by just one of the teachers. Whilst the teacher teaches about the object of learning, the others observe.

LS aim is to improve teaching and learning to evaluate and revise the lesson, and to share lesson experiences with colleagues (Doig & Groves, 2011; Lewis, 2009; Lewis & Tsuchida, 1998; Stigler & Hiebert, 1999). Although the process may vary, it often begins with defining the problem (Hiebert, et al., 2002). Most often this problem is formulated as a learning goal that teachers found to be challenging for their students (Carlgren, 2011). In the Japanese LS design, teachers work in small groups and meet every week to collaborate and plan lessons together to develop an issue that is of concern for the students' learning and understanding (Lewis, 2009, 2016). A key factor of LS is to accomplish a process of teaching-learning goals (Takahashi & McDougal, 2016). According to Fujii (2016), LS is primarily intended to produce learning that helps teachers apply and develop future lesson instruction and classroom activities. LS can have different goals: as a professional development tool, to improve teacher instruction and subject competencies; as a research methodology; and as a means to achieving both the professional development and research goals (cf Holmqvist & Mattisson, 2008; Stigler & Hiebert, 2016). Goldsmith's, et al. (2014) synthesis of 106 research articles according to mathematics teachers' learning found that few studies were focussing on this process.

LS has been implemented in this research in grade 4 in a Swedish context with the learning objects of two- and three-dimensional shapes.

Problem Statement and Research Focus

PBPD research analysis describes researchers and teachers' collaborative processes that are in great need of development. Research has shown that collaborative, iterative, learning processes increase teachers' awareness of the importance of showing what and how student learning can be identified. Examples from previous research showed that subject content must be at the foreground when teachers are planning the object of learning. Yet, there seems to be very few studies that have their focus on the content of spatial learning in the ages of 10–11 years, which is the case in this present study. Therefore, this research aimed to contribute new knowledge about students' spatial learning about two- and three-dimensional shapes, and teachers' awareness of the same through the collaborative process.

Based on the research problem highlighted above, this research aim was to contribute with knowledge of how teachers' awareness and understanding of necessary conditions to enhance students' abilities to discern two- and three-dimensional shapes develop. The research was based on the following research questions:

RQ1 What arguments and assumptions guide the teachers' construction of the research lesson?

RQ2 In what way, if any, does students' knowledge change?

RQ3 What necessary conditions, based on teachers' awareness and understanding, are required to enhance students' abilities to discern the differences between two- and three-dimensional shapes?

Research Methodology

General Background

This research was part of a two-year school development project in a major city in Sweden, intended to develop different collaborative learning models. This research was conducted close to the teachers' ordinary daily work. The teachers intended to develop student knowledge, and the researchers' intentions to study the teachers' work while participating in collaborative professional development, based on the LS approach (Lewis, 2002, 2009, 2016; Stigler & Hiebert, 1999; Takahashi & McDougal, 2016). As the teachers work with developing the students' knowledge of geometrical shapes, the study explores teachers' developed awareness about how to teach students about two- and three-dimensional shapes. In accordance with the Swedish Government, the practice-based professional development research is aiming to develop teachers' professional knowledge in order to enhance their teaching skills. By linking research questions directly to identified needs for improvement and using a research methodology that actively involves the teachers, the improvement work becomes part of the research method (Christensson, 2018).

The study started with two lectures about school development based on scientific approaches, for the entire school. After the initializing lectures, the teachers were divided into smaller groups, and this research reports on the work of the researchers and three teachers who chose to conduct a lesson study to enhance students' knowledge of geometrical shapes. LS is an iterative cyclic model for analysis (see Figure 1), inspired by Stigler and Hiebert (1999) and Lewis (2002) to improve the teaching-learning goals (Takahashi & McDougal, 2016).

When the teachers select an object of learning, it is necessary to identify what is to be focused upon (Holmqvist & Mattisson, 2008). Holmqvist and Mattisson (2008) argued that the most critical factor is the choice of theoretical perspective and method to answer the research questions (p. 37). The teachers' choice of the object of learning to enhance students' abilities was related to the syllabus in the Swedish curriculum of the subject of mathematical goals: "Basic geometrical objects such as polygons, circles, spheres, cones, cylinders, pyramids, cuboids and their relationships. Basic geometrical properties of these objects. /.../ Construction of geometrical objects, both with and without digital tools" (Swedish National Agency for Education [SNAE], 2018, p. 58).

Figure 1
Iterative cyclic model

Sample

The research was conducted in a primary school in Sweden, grade 4, from January 2019 to April 2019 (Table 1). The planning meeting was held at the school where the teachers worked. Each session lasted about 2 hours.

Table 1
Participants and context of the working process

School level	Participating teachers	Period	Lesson total	Sharing of knowledge
Grade 4. One group (pre-test n:14 post-test n:15).	Three primary school level teachers.	January–April 2019.	One lesson cycle.	Colleagues at their own school.

In total three teachers and two researchers participated in this research, which consisted of a lesson study cycle in grade 4. Teacher 1 (T1) is a certified teacher in art (pictures) in grades 1–9 and in religion grades 4–9. T1 has been a certified teacher for 3 years and recently began work at the current school. Neither Teachers 2 or 3 (T2, T3) are certified teachers. T2 has been working as a music teacher in grades 1–5 for 6 years, and for 1 year at the current school. T3 teaches religion and history in fourth grade and has been working at the current school for 1 year (Table 2). This is his first year as a teacher.

Table 2
Study participants

Participant	Age	Sex	Degree	Work experience in years (current school)
Teacher (T1)	28	Male	Yes (1–9)	3 (<1)
Teacher (T2)	31	Male	No (1–4)	6 (1)
Teacher (T3)	27	Male	No (4–6)	1 (1)

The number in brackets is the number of years that the participants had been employed at the current school at the time of the research project, Spring 2019.

Fourteen students participated in this research lesson and took the pre-test. However, one student did not take the pre-test. However, the material that the researchers later received for an inter-reliability assessment of the individual responses included results from 15 students (see Tables 5 and 7). Thus, the pre-test analysis is determined from the researchers having counted 15 tests as completed. According to the teachers several students had special needs and adaptations.

Research Instrument and Procedures

Teachers' planning and acting during the LS is described as a background, and after this description the research procedures will be described. The focus during the teachers' work was primarily about developing their students' abilities to discern the dimensional differences of the

quadrant, triangle, circle, rectangle, cube, cone, sphere and cuboid. The teachers designed their research lesson based on the differences and similarities between two- and three-dimensional shapes (Table 3).

Table 3
The approach of the research lesson

Research lesson design	Part 1: PowerPoint introduction (lecture 15 minutes) contains the following:	Part 2: Lesson activity contains the following:
	2D shapes (visualisation by measurement quadrant, Figure 2) diachronic.	3D shapes in clay (visualisation, Figure 5) diachronic.
	3D shapes (counting the side surfaces of the cube (visualisation and rotation) diachronic.	2D and 3D shapes with paper and ruler, construction of quadrants and cubes (spatial visualisation, rotation) synchronic.
	2D and 3D shapes, art-construction (spatial visualisation, Figures 3 and 4) synchronic.	Short summary of the lesson.
	Differences and similarities between cubes and cuboids (visualisation) diachronic.	
	Differences between cones and cuboids and cubes (visualisation both in art and with artefacts such as toy blocks, dice and cones) diachronic.	
	Differences between cones and spheres (visualisation both in art and with artefacts such as cones and globes diachronic).	

Figure 2 *2D measurement of a quadrant (visualisation)* **Figure 3** *2D and 3D shapes (spatial visualisation)*

Figure 4
2D and 3D shapes (spatial visualisation) 2D and 3D shapes in clay (visualisation)

A pre- and post-test was constructed and used before and after the research lesson. The teachers' evaluation of the LS was discussed within the research group and presented for other teachers at the school. The researchers followed the teachers' learning process and scaffolded their lesson design and were also a part of the teacher's analysis of the students' learning outcomes. The researchers' analysis of the project also included a comparison between teachers' and researchers' assessments of the students' test.

Data Collection

To achieve the aim and answer the research questions, the data collection was consisted of different types of data: Pre- and post-test results, students' experience of pre- and post-test difficulties, audio-recorded teacher conversations during the design of the lesson, audio-recorded teacher conversations after the lesson, and audio recordings of teachers sharing their results with colleagues after the lesson (Table 4).

Table 4
Data collection

Overall data collection	Unit of analysis	Date	Research Lesson
Audio-recorded data that was transcribed verbatim.	Pre-test (Figure 6)	2019/01/30	2019/02/13
	Audio-recorded teacher conversations during design <i>before</i> the research lesson.	2019/02/13	Time of lesson: 45–50 minutes.
	Post-test (Figure 6)	2019/03/06	
	Audio-recorded teacher conversations <i>after</i> the lesson.		
	Audio recordings of teachers sharing their experiences of the lesson with colleagues.	2019/04/10	

Figure 6*Pre- and post-test three dimensional shapes* *Data Analysis*

The empirical material consisted of teachers' introduction by the PowerPoint presentation on the selected learning object (see Table 3). The verbatim transcripts, mainly those from conversations done before the research lesson, were analysed to identify what arguments and assumptions guided the teachers during the planning of the research lesson about mathematical spatial ability (RQ1). To answer RQ2, pre- and post-test results were collected and analysed to identify changes in students' knowledge and awareness of dimensional differences of two- and three-dimensional shapes. To answer RQ3, the verbatim transcripts, mainly those from conversations after the research lesson and when the teachers shared their experiences from the same research lesson, were analysed to identify the teachers' understanding of which necessary conditions are required to enhance students' abilities to discern the differences between two- and three-dimensional shapes.

The analysis was firstly based on the assessment of students' changed knowledge about the learning object based on the pre- and post-tests. Secondly, the pre- and post-test results have guided the researchers to capture the teacher's experience about necessary conditions in relation to changes, if any, in the students' understanding of the two- and three-dimensional shapes. The experiences about the teachers' necessary conditions and assumptions regarding any changes in the students' understanding have been analysed based on the previous research about students' developed spatial ability. The audio-recordings were transcribed and analysed separately and discussed by both researchers to increase the validity and credibility of the selected excerpts.

Ethical Considerations

In today's society, research occupies a prominent position, and the expectations are high. According to the Swedish Research Council guideline for *Good Research Practice* (2017), the researchers have a specific responsibility regarding validity and trust to the participants. It is vital to strive to conducted research on a high-quality level, regardless of whether the results are positive or negative. The researchers are obligated to follow the Good Research Practice guidelines and be free from influences and manipulation or act in personal interests. In this context, good research is systematic, shared with the participating teachers, students, parents

and colleagues. There are no conflicts of interest, methods and reliability. The research process and ethical requirements rest on society's general ethical norms and values. The participating teachers provided written consent to participate in this study and to be audio-recorded. The students and their parents provided both verbal and written informed consent about the study and that any personal information would remain anonymous.

Research Results

Arguments and Assumptions that Guided the Teachers' Construction of the Research Lesson

The analysis of the arguments and assumptions that guided the research lesson design showed how the teachers discussed their experiences before the lesson. In their discussions T2 mentioned that some students had "a red flag in front of their eyes immediately when mathematics is mentioned". T2 summarised (Excerpt 1) his ideas about the lesson plan and developed teaching methods by discussing less about mathematics and tests.

Excerpt 1:

Teacher 2: We should talk less about math, and less talk about the pre- and post-test /.../.

Later, the teachers planned the first part of the lesson (see Table 3) from a synchronic visualisation perspective of the object in daily life. The excerpt below shows their notions of visualising mathematical properties through everyday objects and bringing with them some three-dimensional artefacts.

Excerpt 2:

Teacher 1: /.../ I intend to bring in a tennis ball, I intend to bring in dice, I intend to bring in a cone. Yes, I intend to bring in items.

Teacher 2: Yes. You could spin a globe and ask, "What can we call this?" Lots of such things can be used with tactile and visual stimulation. They develop their knowledge of basic geometric shapes [with the students next to them].

The teachers also mentioned and discussed how they could use paper instead of shapes. "You might be able to talk about the properties of the paper" (T2). The teachers discussed their experiences regarding the conditions necessary for this class. For example, T3 stated that the lesson should not be longer than 45–50 minutes. The teachers had also identified that this is students' need to work in smaller groups, "It is more comfortable for students with special needs and adaptations to have the same structure that they [have] always had, working together as a group, and sitting around a table" (T1). Furthermore, the teachers discussed how this design supports the goal of having the students talk openly to each other about how and what they are doing. T1 has a concrete idea of how to stimulate the students' ability to discern the differences between the three-dimensional shapes:

Excerpt 3:

Teacher 1: They [shall] roll [around] a ball and talk about what the difference is about rolling a ball around the table versus trying to get a cone to the other side of the table. [It is that] it will spin around in circles. The ball spins straight. "Why so?" So, it becomes a bit more that they can describe the differences between the different forms.

The teachers' arguments and assumptions guided them to use everyday objects together with a PowerPoint presentation to elucidate and offer a tactile feeling of the similarities and differences by synchronically visualising the different three-dimensional shapes. The second assumption that guided the teachers' construction of the lesson consists organisational factors such as the short lesson, using less talk about maths, sitting around a table, dividing the class into two groups, and providing a structure that allows the students to learn from each other.

*Identifying Changes in Students' Awareness of
Two- and Three-dimensional Shapes*

In the teachers' design of pre- and post-test, they added a final question (Tables 6 and 8) about the students' experiences of the test, whether it was difficult or easy. The results indicated that students' understanding of the object of learning, geometrical shapes increased between the pre- and post-test (Tables 5 and 7). The results have been analysed due to the percentage of correct answers before and after each lesson. The teachers assessed the students' answer of the term "fyrkant" (Swedish) square for quadrant as correct. In the Swedish language, this is problematic because "fyrkant", square, any combination of four sides and edges between the side surfaces, so it can be used to describe both two- and three-dimensional shapes.

Table 5
Researchers' and teachers' pre-test assessments

Geometric shapes	Pre-test (n=14 students)		
	Percent (%)		Qualitative analysis of student-answers
	Researchers' analysis	Teachers' analysis	
Quadrant	71	93	10 of 14 had correct answer. Four wrote "square".
Triangle	86	86	12 of 14 had correct answer. Two wrote "rectangle".
Circle	100	100	14 of 14 had correct answer.
Rectangle	64	64	9 of 14 had correct answer. One wrote "quadrant". Four did not answer.
Cube	57	57	8 of 14 had correct answer. Two wrote "rectangle". Four did not answer.
Cone	14	14	2 of 14 had correct answer. Five wrong answer: Two wrote "hat", one wrote "castle", another wrote "tube", one wrote "triangle". Seven did not answer.
Sphere	7	7	1 of 14 had correct answer. Seven wrong answer: One answered "2D". Four answered "ball". One answered "basketball", and one answered "circle". Four did not answer.
Cuboids	0	0	No one has answered correctly. Six had a wrong answer: one answered "square", one answered "three-dimension square", one answered "box", one answered "prism", and two answered "rectangle". Eight did not answer.

Students' Experiences of the Pre-test

The teachers added a final question (Table 6): "Was it easy or difficult?" Here the students were able to leave a comment. Fourteen students completed the pre-test.

Table 6
Students' pre-test experiences

Correct answers	Easy	Medium	Difficult	No answer	Total (n=8)
8					0
7		1			1
6	1				1
5		2	1		3
4		1	1		2
3	1	2		2	5
2		1			1
1			1		1
0					0

None of the students achieved 8 of 8 correct answers on the pre-test. One student had only 1 of 8 correct answers, and this student also answered that the pre-test was "difficult". One of five students who had three correct answers wrote that it was an "easy" test; this indicated that the student's self-assessment of his/her prior knowledge did not correspond with reality. One student had seven correct answers and commented that he/she felt that the pre-test was of "medium" difficulty.

Result of Students' Responses to the Post-test

In the post-test, no students had fewer than five correct answers. In the pre-test (Table 5), all students achieved correct answers for only one shape: the circle. Conversely, in the post-test, all students achieved correct answers for all the two-dimensional shapes and one three-dimensional shape: the cube (Table 7). The ability to identify two-dimensional shapes increased most for the rectangle (36%) and the ability to identify three-dimensional shapes increased most at cone (66%).

Table 7
Post-test research analysis n=15, teachers' analysis n=14. Result and inter-reliability and equivalences of the post-test

		Post-test				
Geometric shapes	Post-test				Result and Analysis	
	Researchers' analysis Percent	Change in percent pre- and post-test	Teachers' analysis Percent	Change in percent pre- and post-test		
					Students answers (n=15)	
Quadrant	100	29	100	7	15 of 15 had correct answer.	
Triangle	100	14	100	14	15 of 15 had correct answer	
Circle	100	0	100	0	15 of 15 had correct answer	
Rectangle	100	36	100	0	15 of 15 had correct answer	
Cube	100	43	100	43	15 of 15 had correct answer	
Cone	80	66	71	57	12 of 15 had correct answer. Two students answered wrong and one student did not answer.	
Sphere	67	60	57	50	10 of 15 had correct answer. Five did not answer.	
Cuboid	53	53	50	50	8 of 15 had correct answer. One wrote "cuboids-sphere". Six did not answer.	

Students' Experiences of the Post-test

In both the pre-test and post-test (Table 8), the teachers added a closing question: “Was it easy or difficult?”, where the students were able to leave a comment.

Table 8
Students' post-test experiences

Correct answers	Easy	Medium	Difficult	No answer	Total (n=8)
8	6				6
7	1	1			2
6	1	2	2		5
5	2				2
4					0
3					0
2					0
1					0
0					0

In the post-test, six students' (compared with none in the pre-test) achieved 8 of 8 correct answers. Also, more students in the post-test stated that they had more easily distinguished the geometric shapes: 10 in the post-test verses 2 in the pre-test. These indicated that the student's self-assessment of their prior knowledge corresponded with reality. The result also showed that there are changes in knowledge before and after the research lesson. First, the students' understanding is made apparent in the differences between the pre- and post-test results regarding both two- and three-dimensional shapes. In the post-test, all students identified the two-dimensional shapes, as well as the cube. There was also an increase in the students' ability to identify the remaining three three-dimensional shapes. The second change regarding the student's knowledge was related to their understanding of their self-assessed experience which was in line with reality.

Necessary Conditions for Students to Understand the Differences Between Two- and Three-dimensional Shapes

The teachers discussed the students' knowledge from the post-test as it was related to the lesson. In the audio-recorded material it is clear that T1 was not completely satisfied with his introduction of the object of learning: "I do not think much about the increase itself, but more about my own clarity /.../." The teacher's statement indicates that he has a greater interest in his introduction and clarity regarding the content than whether the students' post-test results will increase. The teacher (T1) is reflecting on his own awareness of how the teaching actions will affect the students' understanding of the content.

After the lesson, the teachers discussed how they perceived the opportunities for the students to discern the geometric shapes.

Excerpt 4:

Teacher 1: It became easier for them when I showed them a cone, instead of just talking about cones in the presentation; they suddenly knew what a cone was. Then they knew, and then they could name it. So that was good. And I used, for example, toy blocks /.../, which I also gave out to the students when we talked about the cube.

Researcher: So, you not only showed the things you had with you [in the lesson], but you also let the students touch [experience] them?

Teacher 1: Yes, and we also talked about whether we can find more things in the room that are cubes, we looked specifically at the cuboids. Then we discussed boxes and furniture and other stuff that was in the room.

Before the lesson, the teachers discussed the importance of having three-dimensional artefacts to use during the lesson, and to synchronically visualise the mathematical shapes as they relate to everyday objects. Later, they discussed the opportunities for distinguishing the spatial properties and spatial relations of the quadrant and the cube by measuring the area and volume.

Excerpt 5:

Teacher 1: But if I said, "square we can check the area of", then after a while, someone may be able to explain volume, but the two students know it and get a lot more space to talk, which allows them to learn from each other /.../.

Researcher: Could you recognise the students' knowledge in any way?

Teacher 1: /.../ I could see them collaborating, even if they work individually, they collaborate. For example, somebody could say, "I need a large rectangle, can you measure that for me?" Or, "Has anyone seen my cube?" So, they use the words.

The excerpt above shows that the teachers are still discussing collaboration opportunities to increase students' knowledge. There is also a connection to the organisational design where the teachers discuss students' collaboration about the object of learning. However, still, the teachers emphasised instruction of peer learning as a knowledge-generating activity. The students are given opportunities through the teachers' lesson design by visualising daily artefacts synchronic with the picture of the three-dimensional shapes through the PowerPoint instructions to interact and thereby develop and extend their previous knowledge of the object of learning.

The activity allowed the students to create geometric shapes using clay and paper (after the PowerPoint introduction) and encouraged them to make the three-dimensional shapes visibly and recognisably (see Figure 5).

Excerpt 6:

Teacher 1: I think it was because they got to see these shapes [in the teacher's PowerPoint presentation], that they could communicate the differences between the shapes, the properties of the shapes and then also that the shapes were set against each other, and also linked to their two-dimensional shapes. So, it was linked to something they recognised before and compared with something that was different, and that they had to work with the shapes with their hands. So maybe they got an understanding of what the shapes look like.

Researcher: Do you mean with the support of the clay?

Teacher 1: Yes, they got to know it. It was tactile, it was visual.

Teacher 2: Together with tactile and visual stimulation, they developed their knowledge of basic geometric shapes [with those sitting next to them].

The teachers continued to reflect on why the students were able to perceive the cube's properties. One reflection is related to the communications between the peers when they discussed the structure of the cube: "Because of the sides, that side is bigger than that side, so it's a rectangle" (students voice through the teachers' reflections). But the latter can also be reflected in the object of learning.

Another condition necessary to acquire knowledge about three-dimensional shapes is, according to the teachers, when the students are guiding each other to create round shapes.

Excerpt 7:

Teacher 1: I make the circle, then [someone says there] it is three-dimensional, and then maybe someone says "globe". And then someone else could say, "But you shouldn't do like that. It is better to roll the meatball or the chocolate ball" and then they started to roll and show with their hands.

The teachers indicated that the students had gained knowledge that a circle and a sphere have the same circular properties. The teachers end their conversation by highlighting how they rolled a ball and slid the cube on the table between the students.

In the next excerpt the students' developed conceptual understanding through art constructions according to the teachers.

Excerpt 8:

Teacher 1: We have talked about that, we have looked at that when we talked about differences between two- and three-dimensional shapes, really, what differentiates them. /.../ Then we talked about cubes and squares a lot, and they drew and talked about how to draw, for example, how many directions you can draw lines in three-dimensional shapes, etc. So, there was a little more focus on the dimensions.

In the excerpt the teachers are sharing their experiences of the research lesson. The teachers highlighted how the students talked about geometrical shapes in other subjects as well.

Excerpt 9:

Teacher 1: We build things now [at the art lesson] that are two and three-dimensional, and then you hear people working together, they usually do. I could see them collaborating, even if they work individually, they collaborate. For example, somebody could say, "I need a large rectangle, can you measure that for me?" Or, "Has anyone seen my cube?" So, they use the words.

By offering daily artefacts simultaneously with pictures in the PowerPoint, the students are giving opportunities to transforming mathematical representations in other contexts, i.e. in the subject of art.

In the following excerpt, the teacher discusses their awareness of their professional development after the lesson together with the researcher.

Excerpt 10:

Researcher: What I hear you say /.../ is that the difference is that you find that *you* talk less and instead let the students discuss and explain more based on the material that you have bring to the classroom? And then you hear the students' use words like "depth", "volume", "area"? and that they describe and help each other?

Teacher 1: Mm. Yes exactly. /.../ I think also it can have been depending on me.

Teacher 2: It is not only about you and your learning – it is also about to be able to *see* when you can step in into the students' conversation and raise student's and give them the opportunity to discuss and share their knowledges.

Unlike Excerpt 1, when the teachers plan their lesson, they discuss using the concept of mathematics sparingly since, in this student's group, they have experienced that some students react inhibitably and with a "red flag" for the subject. Their reflections after the lesson were slightly different. There seems to be a developed thought between what the teachers discussed before the lesson and after the students' learning outcomes. When the teachers reflected together with the researcher after their lesson, they discussed their experiences. They highlighted the possibility that several mathematical concepts can be made visible in other subjects (see Excerpt 8). Similarly, in Excerpt 10, the teachers discuss the importance of paying attention to the students' learning outcomes as well as capturing their professional awareness.

Discussion

This research identified teachers' awareness of how students in fourth grade distinguished all two-dimensional shapes and three-dimensional cube, and cone through visual representation (Van Hiele, 1986). The teacher's PowerPoint instruction showed that most of the shapes (Table 2) are Level 1 visual representations (Van Hiele, 1986). Only the cube offered a distinction from

Level 2 through different rotation directions (Excerpt 6). The latter is also synchronic with the two-dimensional shape quadrant (Excerpt 6). In Excerpt 8, the teacher reflected about “how many directions you can draw with lines in three-dimensional shapes” as cubes synchronic with two-dimensional squares. According to Van Hiele (1986), the teacher offered a conceptual understanding of the cubes on Level 5. This can also be related addressed to Hallowell et al. (2015) results about difficulties at this year of age to transform curves from two- to three-dimensional. In the post-test (Table 7) and the teachers' assumptions, it is the cube that has the most increased understanding (see Excerpts 4, 5, 6, 7 and 8). The sphere does not increase at all, even though the students' during the pre-test showed an understanding of a circle. However, the organisation in the classroom provides the students to interact and discuss all the shapes. But all the three-dimensional shapes were not highlighted by the teacher in the formal mathematical language (cf Sfard, 2007). For example, they used “globes” and “meatballs” instead of the sphere (Excerpt 7). After the lesson, the teachers reflected on the importance of incorporating everyday objects such as cones, toy blocks and globes

while showing the shapes in their PowerPoint presentation. In the result, the teachers illustrated the cuboids only by pointing to furniture and boxes in the classroom. Regarding the cuboids, students are allowed to see the similarities only based on a non-rotating visual representation: both in the PowerPoint presentation and the everyday objects. Cuboids, such as the rectangle, are distinguished only in their horizontal form (Level 1 Van Hiele, 1986). Even though the students are working to identify the similarities between the cuboid and rectangle (cf Maybarr, 1983) during the lesson, there are still 8 of 15 students who do not respond correctly during the post-test (see Table 7). The latter indicated that even if the students are offered concrete examples of the shapes (Piaget, 1972), they still do not develop their understanding and awareness of all the three-dimensional shapes equally. By just showing concrete examples does not contribute to increased understanding.

Through tactile visualisation with the support of clay and paper, teachers discussed on different techniques, such as meatball production as support for developing the spatial ability for identifying spheres. Sfard (2007) argued for the importance of making the mathematical content visible when developing collaborating classrooms. However, organising for a more collaborative, linguistic environment is not enough (Excerpt 2). The teacher must also contribute to the formal mathematical language (Sfard, 2007). It can thus be debated whether the mathematical concept of the globe has been highlighted in the various activities, such as taking in a globe (though not naming it as a sphere) and discussing “meatball” production rather than describing a “sphere”. The result also emphasized that the shape of “sphere” as a concept also has the second-worst percentage during the post-test (see Table 7).

According to the teacher's assumption by incorporating everyday objects, it increased the students' understanding of three-dimensional shapes (cf Smith, 2001) (Excerpt 4). The teachers assume that the students have developed their spatial ability to understand their surroundings (Gardner, 1993). This is also related to the abstract thinking to be able to discern the rotation of the globe in different spatial spaces (Clements & Battista, 1992). In the results, the teachers offered students opportunities for tactile and visual representations through clay and paper activities which stimulated student's imagination of properties of the shapes (Ball & Cohen, 1999; Klim-Klimaszewska & Nazaruk, 2020). For example, in Excerpts 6 and 8, teachers assume that students need to see and experience the shapes at the same time so that they can discern similarities and differences in the proportions of the shapes. This could contribute to both horizontal and vertical mental spatial understanding through visual rotation (Maier, 1996).

The teachers are not certified mathematics teachers, still there is an increased understanding by the students of several two-and three-dimensional shapes (Table 5 and 7). One of the teachers is certified in art in grades 1–9 and in the syllabus in the Swedish curriculum of the subject of art some of the goals is: “Drawing, painting, printing and three-dimensional

production [...]. Different elements that make up and create a sense of space in pictures, such as lines [...] and how these can be used when creating pictures" (SNAE, 2018, p. 28). This could be interpreted as the goals in the subject of art providing support for the teachers in this research to interpret even the mathematical goals. The students' increased understanding of two- and three-dimensional shapes could therefore be related to the similarities of these curriculum goals regarding the importance of developing students' spatial abilities (Ball & Cohen, 1999). Furthermore, the teachers' instruction by offering the students an added final question in the pre- and post-test about their experiences of the test, whether it was difficult or easy, better aligns with the students' actual post-test knowledge. It could be interpreted as the teachers' construction of the research lesson contributing to the students being offered to reason similarities and differences between two- and three-dimensional shapes (Excerpts 2, 3 and 5). This could also achieve the curriculum's following goals in the subject of art: "Words and terms for interpreting, writing and discussing the picture's design and message" (SNAE, 2018, p. 29), and through these objectives at the same time may have contributed to reasoning and thus contributed to students' conceptual understanding of the cube and cone (Ball & Cohen, 1999). Nevertheless, it is possible to think that a limitation is that the teachers in this research are not certificated mathematics teachers and therefore explain why the pre- and post-tests only test the students' spatial knowledge on Level 1 (Van Hiele, 1986). Despite this it could be discussed in relation to the fact that students mathematical two- and three-dimensional abilities increase (Clements & Battista, 1992; Olkun, 2003; Thurstone, 1950).

The results of this research addressed the importance of teachers' developing knowledge about designing tests based on the chosen object of learning (Ball & Cohen, 1999). We find further support that teachers are choosing the object of learning based on their need to develop their everyday practice in the classroom (Smith, 2001). According to Smith (2001), teachers should further develop an understanding of topics, and pedagogy—components of a teacher's knowledge base for teaching—by designing tasks that are central to teaching.

The results from this research strengthen earlier discussions that PBDP research is rooted in the issues and challenges that school professionals face and deal with in their day-to-day practice, and to give equal opportunities to develop abilities and build new knowledge (Ball & Cohen, 1999; Christensson, 2018). According to Harris et al. (2012), a teacher-driven approach promotes new skills in the classroom. This research leads to knowledge that teachers can use to improve their teaching and working methods as well as their ability awareness to make professional judgments about development and learning (Carlgren, 2005, 2011).

In this research, the learning process (Wood, 2019) has emphasised the teaching targets for understanding instead of teaching as telling, which had been the important direction for the teachers (Lewis, 2009). In two Excerpts (4 and 6), the researchers guided the teachers in their collaborative effort to improve their classroom PBPD, reflecting over the teacher learning process and analysing the merits and disadvantages of the research lesson.

The research model for the teachers' research design was inspired by the Japanese collaborative professional development model lesson study (Doig & Groves, 2011; Lewis, 2002, 2009; Lewis & Tsuchida, 1998; Stigler & Hiebert, 1999). The result showed increased awareness of using collaboration opportunities to apply classroom (Vrikki et al., 2017; Warwick et al., 2019) instructions and activities to increase students' knowledge about the object of learning (Fujii, 2016) two-and three-dimensional shapes.

Conclusions

The results of this research highlight the students' (in primary school) increased understanding of two- and three-dimensional shapes even though the teachers in this research are not certified maths teachers. This research illuminates how the PBPD approach stressed the

teachers' teaching targets for understanding students' content knowledge of geometric shapes. The results provide evidence that PBPD research approach, containing reflective discussions with a researcher, developed teacher's awareness and understanding of necessary conditions to enhance students' abilities to discern two- and three-dimensional shapes. The analysis of the research data identified teachers' awareness and understanding, which challenges students need to face in learning about three-dimensional shapes from two-dimensional representations.

Concerning this result, further research should effort more iterative and revised research lesson design to develop more powerful content knowledge and classroom activity in this topic area. The findings also pointed out that there is a need to examine why artefacts did not increase all three-dimensional shapes. Additionally, more studies are needed to develop a PBPD framework to promote a more conceptual teacher understanding for lesson design and support a more forceful evidence-based teaching approach in geometry in primary school.

Acknowledgements

The authors would like to thank their supervisor's professor Mona Holmquist and the lecturer Jonas Alwall for guidance and support. The authors would also want to thank the reviewers for the comments and guidance. The authors want to thank colleagues at Malmö University and the faculty of Education and Society. This research is a part of the Swedish National Research School of Special Education for Teacher Educators (SET), funded by the Swedish Research Council (grant no. 2017-06039), for which the authors are grateful.

References

- Ball, D., & Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession* (pp. 3–32). Jossey-Bass Education Series.
- Carlgren, I. (2005). *Forskning och skola i samverkan – Kartläggningar av forskningsresultat med relevans för praktiskt arbete i skolväsendet* [Research and school in cooperation. Survey of research results relevant to practical work in the school system.] Vetenskapsrådet [Swedish research council.]
- Carlgren, I. (2011). Forskning ja, men i vilket syfte och om vad? Om avsaknaden och behovet av en 'klinisk' mellanrumsforskning. [Research yes, but for what purpose and for what? About the lack and need for a 'clinical' gap research] *Forskning om undervisning och lärande*. [Research on Teaching and Learning], 5(2), 64–79.
- Chapman, R. S. (1997). Language development in children and adolescents with Down syndrome. *Mental Retardation and Developmental Disabilities Research Reviews*, 3(4), 307–312. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1098-2779\(1997\)3:4<307::AID-MRDD5>3.0.CO;2-K](https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2779(1997)3:4<307::AID-MRDD5>3.0.CO;2-K)
- Christersson, C. (2018). *Forska tillsammans: samverkan för lärande och förbättring* [Research together: Collaboration for learning and improvement]. The Government's Official Investigations, SOU 2018:19. Norstedts juridik.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.
- Doig, B., & Groves, S. (2011). Japanese lesson study: Teacher professional development through communities of inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 77–93.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- French, D. (2004). *Teaching and learning geometry: Issues and methods in mathematical education*. Continuum.
- Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of lesson study. *ZDM Mathematics Education*, 48(4), 411–423. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3>

Balli LELINGE, Christina SVENSSON. Teachers' awareness and understanding of students' content knowledge of geometric shapes

- Gardner, R. B., & Kamran, N. (1993). Characteristics and the geometry of hyperbolic equations in the plane. *Journal of Differential Equations*, 104(1), 60-116. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1993.1064>
- Gardner, D.C. (2011). Characteristic collaborative processes in school-university partnerships. *Planning & Changing*, 42(1/2), 63-86.
- Goldsmith, L. T., Doerr, H. M., & Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(1), 5-36. <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-013-9245-4>
- Goodlad, J.I. (1991). School-university partnerships: Fundamental concepts. *School of Education Review*, 3(2), 36-42.
- Halliday, M. A. K. (1981). Linguistic function and literary style: An inquiry into the language of William Golding's *The Inheritors*. In D. C. Freeman (Ed.), *Essays in modern stylistics* (pp. 325-360). Routledge.
- Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 363-375. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0664-9>
- Harris, K. R., Lane, K. L., Graham, S., Driscoll, S. A., Sandmel, K., Brindle, M., & Schatschneider, C. (2012). Practice-based professional development for self-regulated strategies development in writing: A randomized controlled study. *Journal of Teacher Education*, 63(2), 103-119. <http://dx.doi.org/10.1177/0022487111429005>
- Herro, D, Hirsch, S. E., & Quigley, C. (2019). A faculty-in-residence programme: Enacting practice-based professional development in a STEAM-focused middle school. *Professional Development in Education*, December 2019, 1-17. <https://doi.org/10.1080/19415257.2019.1702579>
- Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J.W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher*, 31(5), 3-15. <https://doi.org/10.3102/0013189X031005003>
- Holmqvist, M., & Mattisson, J. (2008). Variation theory: A tool to analyse and develop learning at school. *Problems of Education in the 21st Century*, 7(7), 31-38. <http://oaji.net/articles/2014/457-1392234817.pdf>
- Klim-Klimaszewska, A., & Nazaruk, S. (2017). The scope of implementation of geometric concepts in selected kindergartens in Poland. *Problems of Education in the 21st Century*, 75(4), 345-353. <http://www.scientiasocialis.lt/pec/node/1072>
- Lewis, C. (2002). *A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools.
- Lewis, C. (2009). What is the nature of knowledge development in lesson study? *Educational Action Research*, 17(1), 95-110. <https://doi.org/10.1080/09650790802667477>
- Lewis, C. (2016). Learning to lead, leading to learn: How facilitators learn to lead lesson study. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(4), 527-540. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0753-9>
- Lewis, C., & Tsuchida, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river: How research lessons improve Japanese education. *American Educator*, 22(4), 12-17, 50-52.
- Maier, P. H. (1996). Spatial geometry and spatial ability – how to make solid geometry solid? In E. Cohors-Fresenborg, K. Reiss, G. Toener, & H-G. Weigand (Eds.), *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996* (pp. 69-81). Osnabrueck.
- Marchiş, I. (2008). Geometry in primary school mathematics. *Educatia*, 21(6), 131-139.
- Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 58-69.
- OECD (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and equity in education*. OECD.
- Olkun, S. (2003). Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 3(1), 1-10.
- Pêna Trapero, N. (2013). Lesson study and practical thinking: A case study in Spain. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(2), 2013, 115-136. <https://doi.org/10.1108/20468251311323379>
- Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, 15(1), 1-12, 72.
- Seago, N., Jacobs, J., Driscoll, M., Nikula, J., Matassa, M., & Callahan, P. (2013). Developing teachers' knowledge of a transformations-based approach to geometric similarity. *Mathematics Teacher Educator*, 2(1), 74-85. <https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacheduc.2.1.0074>

- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613. <http://dx.doi.org/10.1080/10508400701525253>
- Skott, J., Mosvold, R., & Sakonidis, C. (2018). Classroom practice and teachers' knowledge, beliefs and identity. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation, and collaboration in Europe* (pp. 162-180). Routledge.
- Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, U.S.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Free Press.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(4), 581-587. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0787-7>
- Swedish National Agency for Education. (2018). *Curriculum for the compulsory school, preschool class and school-age educare*. 2011 Revised 2018. Stockholm: Norstedts Juridik kundservice.
- Swedish Research Council (2017). *God forskningssed*. [Good Research Practice]. Swedish Research Council.
- Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: Maximizing the impact of lesson study. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 48(4), 513-526. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x>
- Thurstone, L. L. (1950). Some primary abilities in visual thinking. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 94(6), 517-521. American Philosophical Society.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. a theory of mathematics education*. Academic Press.
- Vrikki, M., Warwick, P., Vermunt, J. D., Mercer, N., & Van Halem, N. (2017). Teacher learning in the context of Lesson Study: A video-based analysis of teacher discussions. *Teaching and Teacher Education*, 61(2017), 211-224. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.10.014>
- Warwick, P., Vrikki, M., Færøyvik Karlsen, A. M., Dudley, P., & Vermunt J. D. (2019). The role of pupil voice as a trigger for teacher learning in Lesson Study professional groups. *Cambridge Journal of Education*, 49(4), 435-455. <https://doi.org/10.1080/0305764X.2018.1556606>
- Wilson, K. M., & Swanson, H. L. (2001). Are mathematics disabilities due to a domain-general or a domain-specific working memory deficit? *Journal of Learning Disabilities*, 34(3), 237-248. <https://doi.org/10.1177/002221940103400304>
- Wood, K. (2019). The path of teachers' learning through lesson and learning studies. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 9(2), 93-99. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2019-0083>
- Yoshida, M. (1999). *Lesson study: A case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Ph.D. Dissertation, The University of Chicago, Illinois, Chicago.

Received: May 05, 2020

Accepted: September 20, 2020

Cite as: Leling, B., & Svensson, C. (2020). Teachers' awareness and understanding of students' content knowledge of geometric shapes. *Problems of Education in the 21st Century*, 78(5), 777-798. <https://doi.org/10.33225/pec/20.78.777>

Balli Leling
(Corresponding author)

PhD Student, University Lecturer, Malmö University, 20506 Malmö, Sweden.
E-mail: balli.leling@mau.se
Website: <https://mau.se>
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2435-0913>

Christina Svensson

PhD Student, University Lecturer, Malmö University, 20506 Malmö, Sweden.
E-mail: christina.svensson@mau.se
Website: <https://mau.se>
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1815-887X>

Min bakgrund som förskollärare, 1-7 MaNO lärare, kommunlektor och lärarutbildare har bidragit till avhandlingens syfte att bidra med kunskap om hur kollaborativ undervisningsutvecklande professionsutbildning kan utveckla blivande och verksamma lärares syn på och förståelse för yngre elevers/barns lärande i matematik och undervisningens betydelse för att stödja deras lärande. Avhandlingens kunskapsbidrag utgörs av insikter i hur undervisning, kollaborativt planerad och iscensatt av lärarutbildare, i sin tur påverkar blivande och verksamma lärares syn på matematikundervisningens utformning samt barn och elevers matematikkunnande. För att utveckla blivande och verksamma lärares förmåga att undervisa i matematik krävs ett större fokus på hur barns och elevers matematikkunnande kan förstås och utvecklas (KCS).

ISBN 978-91-7877-245-2 (tryckt)
 ISBN 978-91-7877-246-9 (pdf)
 ISSN 1651-4513

MALMÖ UNIVERSITY
205 06 MALMÖ, SWEDEN
WWW.MAU.SE