



MALMÖ HÖGSKOLA

Lärarytbildningen

Natur, miljö, samhälle

## Examensarbete

15 högskolepoäng

# *Den varierande likformigheten*

**Fyra lärares undervisning i geometrisk likformighet ur ett  
variationsteoretiskt perspektiv**

*The varying similarity  
Four teachers teaching geometric similarity  
from a variation theory perspective*

Antonios Marinos

Lärarexamen 270hp  
Matematik och lärande  
2011-06-07

Examinator: Per-Eskil Persson

Handledare: Leif Karlsson



## **Abstract**

The study examines how teachers treat the teaching of the subject geometric uniformity and the potential dimensions of variation that can be opened. The study was conducted through observation of four secondary teachers who teach mathematics course B (samhällsprogrammet). The observations were supplemented by two interviews. When processing the collected data material, variation theory has been used as an analytical tool. The results show that students experienced a number of openings of dimensions of variation, which may be relevant to create challenges for students.

Keywords: Teachers, geometric uniformity, mathematics, variation theory, observation, interview, teaching content and dimension of variation.

## **Sammanfattning**

Studien undersöker hur lärare behandlar undervisningsinnehållet geometrisk likformighet, samt de möjliga dimensionerna av variation som öppnas. Studien genomfördes genom observation av fyra gymnasielärare, vilka undervisar i matematikkurs B (samhällsprogrammet). Observationerna kompletterades med två intervjuer. Vid bearbetning av det insamlade datamaterialet har variationsteorin använts som analysverktyg. Resultatet visar att eleverna fick erfara ett antal öppnade dimensioner av variation, som kan vara av betydelse för att skapa utmaningar för eleverna.

Nyckelord: Lärare, geometrisk likformighet, matematik, variationsteori, observation, intervju, undervisningsinnehåll och dimension av variation.



# Innehåll

Abstract .....	3
Sammanfattning.....	3
Variationsteori - Lärande i termer av "erfara" .....	7
Två inlärningsteoretiska perspektiv .....	9
Inledning.....	11
Syfte och frågeställning.....	11
Tidigare forskning.....	12
Metod .....	14
Val av metod - metoddiskussion .....	14
Urval .....	16
Datainsamlingsmetoder .....	17
Procedur/ databearbetning.....	18
Resultat/ analys.....	20
Likformiga månghörningar .....	21
Form .....	22
Skala .....	23
Alla vinklar lika (hos trianglar).....	27
Två vinklar lika (hos trianglar) .....	28
Förhållande mellan motsvarande sidorna lika .....	28
Förhållanden mellan två av sidorna lika/ mellanliggande vinklar lika (hos trianglar).....	29
Vilken sida motsvarar vilken.....	29
Likformighetens förekomst/ likformighet i omvärlden.....	31
Sammanfattning av resultaten .....	33
Diskussion.....	34
Didaktiska konsekvenser .....	37
Vidare forskning .....	37
Käll- litteraturförteckning.....	39
Bilaga 1 .....	41
Intervjufrågor .....	41



## Variationsteori - Lärande i termer av ”erfara”

Variationsteori är ett relevant nytt teoretiskt perspektiv på lärande, vilken har sitt ursprung i den fenomenografiska ansatsen enligt (Carlsson 2002). Kroksmark (1990) beskriver fenomenografien som en modell för didaktiskt forskning. Dess utgångspunkt är den konkreta levda världen samt hur individen uppfattar denna genom olika aspekter (egenskaper) hos objektet ifråga. Olteanu (2007) betonar att ett antal studier baserade på den fenomenografiska ansatsen visat att elever förstår ett givet undervisningsinnehåll på olika sätt. Förståelsen är starkt kopplad till variation eller icke variation på aspekterna (det vill säga egenskaper) som rör innehållet. Olteanu menar att lärares sätt att behandla det matematiska innehållet genom att fokusera på objektets egenskaper på olika sätt, påverkar elevernas möjligheter att lära. Marton och Booth (1997) argumenterar att individer lär sig något på kvalitativt skilda sätt vilka är olika från individ till individ. De menar att individen lär sig genom att erfara ett visst fenomen, samtidigt sker erfandet på ett specifikt sätt. Det specifika sättet förklarar Carlsson (2002) såsom att lärandet kan definieras med hjälp av tre begrepp, *urskiljning*, *variation* och *samtidighet*. Dessa tre komponenter, samt begreppet *aspekt*, utgör variationsteorins fundamentala grund. Ytterligare förklaring av begreppen, samt deras sammankoppling är viktigt för förståelsen för hur variationsteori fungerar och tillämpas i studiens fortsättning.

Carlsson (2002), hävdar att Martons tes ”att erfara något (objekt, fenomen) på ett visst sätt”, kan relateras till både en strukturell och en meningsaspekt, vilka är sammanfogade. För att individen ska erfara eller uppfatta något, krävs att något nytt uppstår som är skilt mot tidigare erfarenhet. Individen måste alltså uppleva *urskiljning* på objektets aspekter. Då möjliggörs relationen mellan delarna (aspekter) och helheten (objekt), vilket i sin tur leder till att individen blir medveten om delarna (aspekter blir meningsfulla) i den mån individen relaterar dem till något som redan är känt. Vidare pekar Carlsson (2002) på begreppet *variation*. Hon menar att inget urskiljande kan ske i medvetandet utan variationens förekomst, det vill säga att vi inte kan ge mening till något utan att vara medvetna om dess möjliga ”varianter”. Å andra sidan, kan ingen variation upplevas om någon skillnad inte existerar. En mer deskriptiv fast förenklad förklaring angående hur variation, aspekt och urskiljning uppfattas formulerar Carlsson (2002) i följande exempel. Hon betraktar ”fåglar” som objekt och antar att om bara en fågelart var känd hade vi inte kunnat avgöra vad en örn respektive falk är, utan vi skulle bara betrakta dem som ”en fågel”. Det saknas något att jämföra med, en referensram och det förekommer ingen variation. I verkligheten vet vi dock att det finns olika slags fåglar som

även varierar på storlek, färg, vanor och så vidare. Egenskaperna utgör en aspekt på objektet ”fåglar” och genom att urskilja aspekten ifråga i medvetandet, öppnas en *dimension av variation*. Variationens förekomst är alltså sammanflätad med hur individen erfar (upplever) olika dimensioner av samma fenomen (objekt). Om vi, till exempel, upplever något som ”tunt” och ”litet”, möjliggörs en *samtidig* kontrast med dimensionerna ”tjock” och ”stort”. Enligt Carlsson (2002), ska det finnas samtidighet av åtminstone två olika förhållande, så att begreppet *skillnad* blir meningsfullt. (På vilket sätt variationsteorin kopplas med undervisning förklaras nedan).

Runesson (1999) kallar variationsteori för ”*variationsteori för lärande*”. Hon menar att ett sådant perspektiv möjliggör förståelsen om hur lärandet underlättas. Carlsson (2002) hävdar att undervisning ska sträva efter att ge eleverna möjligheter att förstå sin omvärld ur olika synvinklar vilket sker genom att bland annat stimulera eleverna att se skillnader i aspekter i undervisningsinnehållet. Kullberg (2010) påstår att det som eleverna kan urskilja är beroende av den variation som skapas i en undervisningssituation, med andra ord de olika dimensioner av variation som öppnas eller inte, genom att läraren fokuserar på några aspekter genom variation medan andra aspekter tas för givna (icke variation).

Enligt Marton och Booth (1999) relateras lärandet med en viss struktur hos medvetandet. Runesson (1999) förklarar att medvetandet är organiserat kring något objekt på ett visst sätt. Objektet kan vara konkret (en fågel) eller abstrakt (såsom ett matematiskt begrepp). Hon betonar att fastän alla aspekterna kan finnas i medvetandet, sker det inte samtidigt, utan medvetandet fokuseras på (tematiserar) något (tema) och allt annat som är relevant med ”temat” utgör dess bakgrund. Som Kullberg (2010) förklarar, är medvetandet alltid inriktad mot något specifikt, ”focal awareness” (det fokala medvetandet) vars struktur och organisation är dynamisk, med andra ord kan medvetandet fokusera på något annat objekt vid en annan tidpunkt. Erfarandet definieras således som det sätt som medvetandet är strukturerat på vid en viss tidpunkt och lärande uppstår i den mån det sker en förändring i medvetandets struktur (Runesson 1999).

Eftersom avsikten med studien är att genom lärares sätt att undervisa momentet ”geometrisk likformighet”, undersöka vilka möjligheter eleverna får att lära sig har undersökningen



genomförts utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv och målet är att studera hur olika dimensioner av variation öppnas i undervisningssituationen. Enligt Runesson (1999), skapas en så kallad "variationsrymd" om läraren i sin undervisning erbjuder olika dimensioner av variation. Hon menar att den här rymden består av alla undervisningsobjektets aspekter som läraren eller eleverna tematiserar (eller lyfter fram) och möjliggör ett erfalande hos eleverna. För att belysa hur en undervisningskontext kan tolkas utifrån variationsteori, använder Runesson ett exempel där två lärare förklarar för eleverna begreppet "kvadrat". Den ene läraren visar hur en kvadrat ser ut och fokuserar på en aspekt i taget (vinklarnas storlek/ alla är 90 grader, förhållandet mellan sidorna/ är lika/ parallella, antal sidor/ är fyra ), därefter ger han kvadratens definition. Den andra läraren lyfter fram en aspekt i taget på ett annat sätt. Han ändrar till exempel vinklarnas storlek, medan sidornas längd förblir desamma så att den nya figuren som uppstår blir en romb (aspekten "vinklar" varierar; aspekterna "sidornas längd" och "antal sidor" tas för givet). Han varierar även aspekten "sidornas längd" medan han behåller vinklarna räta (genom att visa en rektangel), eller "antal sidor" (en triangel visas). Eleverna får möjlighet att erfara begreppet kvadrat genom att kontrastera en kvadratisk figur med en annan som inte är kvadrat. Sammanfattningsvis skapar den senare läraren dimensioner av variation medan den förste inte gör det.

## **Två inlärningsteoretiska perspektiv**

Två inlärningsteoretiska perspektiv relevanta för examensarbetet presenteras här. Studien använder sig av variationsteorin, men sambandet med dessa perspektiv bör tas upp. Avsikten har inte varit att jämföra eller värdera, utan snarare att belysa en eventuell koppling, som kan förklara mekanismerna för inlärningen då det matematiska innehållet (likformighet) presenteras.

Jaworski (1998) hänvisar till en konstruktivistisk modell, vilken enligt henne, är lämplig för klassrumsobservationer när det gäller lärarnas tänkande om hur de bedriver undervisningen. Modellen definierar kunskap som en mänsklig dynamisk konstruktion, det vill säga att den förändras under tiden och i samspel med den mänskliga interaktionen som äger rum inom den fysiska världen. Individerna skapar således sin egen kunskap genom interaktion. På ett sådant sätt, förändrar individen sin nuvarande kunskap och skapar nya kunskaper. Vidare hävdar

Jaworski (1998) att även om det finns kunskap utanför individen, så kan människor inte veta om det eftersom kunskaper är knutna till individens egna erfarenheter. Jaworski (1998) förklarar vidare att matematiken har en sociokulturell karaktär. Den är en social konstruktion som har förmedlats till oss genom sociala processer och medier såsom läromedel, berättelser och undervisning med mera. Hon hävdar att eleverna förstår matematiken utifrån sina egna erfarenheter samt genom interaktion mellan lärare och elev och utifrån denna interaktion utmanas och utvidgas elevernas kunskap. Sambanden mellan ovanstående perspektiv och variationsteorin betonas även av Runesson (1999):

”en analys utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv innebär alltså att hitta andra aspekter och ge en beskrivning t.ex. av vad det faktiskt innebär att ge eleverna en matematisk utmaning och vad som utgör en potential för elevernas lärande” (sid. 57).

Hon menar att vad läraren gör, det vill säga hur läraren behandlar innehållet är avgörande för att eleverna ska uppleva matematiska utmaningar och utvidga sina kunskaper.

Sambandet behandlas senare i diskussionsdelen.

Dysthe (2003) tydliggör att ett sociokulturellt perspektiv på lärandet bygger på samverkan i en kontext, såsom under en lektion. Lärandet blir således ”deltagande i en praxisgemenskap”. Vidare hävdar hon att språket fungerar som ett kulturellt medierande (förmedlande) redskap för lärande. Dysthe (2003) betonar Vygotskijs begrepp *Den Proximala Utvecklingszonen*, nämligen det som eleven kan lära sig på egen hand i kontrast mot den potential som finns att samma elev ”expanderar” sitt lärande med hjälp av läraren eller en kamrat som har kommit längre. Det ovanstående begreppet nämns inte i Jaworskis analys. Perspektivet är av betydelse för studien då det finns ett samband med variationsteorin. Runesson (1999) förklarar detta samband. Hon påstår att erfarenheten, språk och kultur är beroende på varandra och undervisning ur ett variationsteoretiskt perspektiv anses som ett möte mellan lärarens och elevens erfarenhetsvärld.

## Inledning

Under mina år på Lärarutbildningen i Malmö har jag framförallt då jag varit på VFT (verksamhetsförlagd tid) kommit i kontakt med olika lärare, lärarstilar och undervisningsmetoder. Som blivande matematiklärare har jag då främst varit intresserad av att utveckla en egen undervisningsstil, som kan öka elevernas möjligheter att lära sig ett givet matematiskt innehåll. Ambitionen har drivit mig till att läsa mycket av de befintliga teorierna om lärande. Under kursen *matematikdidaktisk forskning*, kom jag även i kontakt med vetenskapliga artiklar som mestadels handlade om hur matematikundervisning kan effektivisera elevernas inlärningsförmåga. Speciellt har Ulla Runessons doktorsavhandling *Variationens pedagogik - skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*, gett mig möjligheten att se lärandet utifrån ett nytt perspektiv, där fokus står på hur läraren behandlar det matematiska innehållet.

Utifrån min egen skoltid i det grekiska skolsystemet ser jag på den svenska skolan med lite andra ögon och noterar att geometrin fått en renässans och därför väljer jag att i studien studera just geometrin och då likformighet ur ett variationsteoretiskt perspektiv. Min förhoppning är att studien kan bidra till utvecklingen av nya strategier för lärare då det gäller undervisning i matematik.

## Syfte och frågeställning

Studiens syfte är att beskriva och analysera sätten som olika lärare genomför undervisning inom området geometrisk likformighet. Undervisningen betraktas i min studie som en grund för förändring av elevers kunskaper.

Frågeställningar:

- Vilka aspekter på objektet (likformighet) fokuserar läraren på?
- Vilka av dessa aspekter utgör en dimension för variation?

I studien undersöks hur läraren bearbetar själva undervisningsinnehållet som riktar sig mot elevernas lärande, utan att ta hänsyn till elevernas mentala processer.

## Tidigare forskning

Variationsteorin har använts som analysverktyg i ett antal studier som rör matematikundervisning under olika klassrumssituationer (Kullberg 2010, s. 31) då lärarna undervisar samma moment. Kullberg (2010) pekar på att sättet som undervisningen bedrivs, erbjuder olika möjligheter för elevernas lärande och påstår därmed att variationsteorin är ett redskap som möjliggör analys av klassrumskontexter.

Constanta Olteanu har skrivit en doktorsavhandling inom den nationella Forskarskolan i Pedagogiskt Arbete: *Vad skulle x kunna vara?* Hennes utgångspunkt var att belysa varför svårigheter uppstår i elevernas lärande i algebra. Studien handlar om undervisningen av ett specifikt innehåll i matematikkurs B (andragradsekvationer och funktioner) och elevernas lärande av detta. Syftet med studien är att klargöra och analysera relationer mellan det erhållna innehållet, det vill säga det som lärare undervisar i klassrummet och det som eleverna lär sig när det gäller andragradsekvationer och funktioner. Hon väljer dock att inte ta hänsyn till lärarnas uppfattningar eller kunskap i ämnet (Olteanu 2007, s. 18-19). Det som gör studien relevant här, är att Olteanu kommer fram till sina tolkningar genom en variationsteoretisk begreppsapparat även om undervisningen utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv inte är det centrala i hennes studie. Först observerades två gymnasielärares undervisning genom videoinspelade lektioner. Lärarna arbetade på samma skola och använde dessutom samma läromedel. Därefter kompletterades observationerna med semistrukturerade intervjuer med lärarna samt åtta elever, varefter elevernas skriftliga prov dokumenterades i slutet av momentet. Resultatet visade att trots att lärarna undervisade på samma skola och följde samma läroplan blev eleverna bekanta med innehållet på olika sätt. Ur studien framgår att den ena läraren lyckades få fram fler aspekter av andragradsfunktioner och ekvationer än den andra, vilket betyder att lärarnas sätt att undervisa öppnade fler eller färre dimensioner av variation på samma objekt (Olteanu 2007, s. 252).

Ulla Runesson undersökte i sin doktorsavhandling: *Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* fem lärare med fokus på undervisning i bråk och procent i årskurs sex och sju, med syftet att upptäcka olikheter när det gäller undervisningsinnehållet i klassrummet. Utifrån observationer analyserade hon vilka aspekter lärarna och eleverna tar upp och vilka dimensioner av variation som öppnas i förhållande till objektet (bråktal och procent). Resultatet var att trots att samma moment undervisades och samma läromedel och

planering användes, förekom en skillnad i undervisning när det gäller olika dimensioner av variation som öppnades under lektionen (Runesson 1999, s. 290). Examensarbetet har i avseende av metodval formats efter Runessons avhandling.

# Metod

## Val av metod - metoddiskussion

Syftet med examensarbetet är att studera hur lärare behandlar det matematiska innehållet då de undervisar begreppet geometrisk likformighet. För att uppnå målet har det variationsteoretiska perspektivet använts vid bearbetning av det insamlade datamaterialet, vilket är observationer och kvalitativa intervjuer, det vill säga ett kvalitativt tillvägagångssätt.

Enligt Patel och Davidsson (2003), används observationer för att samla information när det gäller beteenden och skeenden i olika former, men även av verbala yttranden. Vidare är observationer oberoende av informanternas villighet att lämna information. Observationerna har dock kompletterats med kvalitativa intervjuer för att öka validiteten. Enligt Patel och Davidsson (2003) kan validiteten öka, om forskaren använder sig av flera insamlingsmetoder, till exempel observationer och intervjuer. Ett sådant arbetssätt kallas för triangulering, och det har tillämpats vid studiens datainsamling.

Hatch (2002), hävdar att det finns möjlighet vid en kvalitativ intervju att få fram meningsfull information om forskningsobjektet som eventuellt inte är synlig vid en observation. En kvalitativ metod kan enligt Larsson (1986), sikta mot att beskriva både det som observeras utifrån (observation, fakta) samt hur man har tänkt på något (intervju). Strävan har varit att fånga båda perspektiven, i studien, för att uppnå god validitet.

Klassrumsundervisning ses som en social interaktion med lärare och elever som aktörer. Hatch (2002) påstår att kvalitativa undersökningar strävar efter att fånga aktörernas perspektiv när det gäller deras handlingar i en specifik social kontext. Enligt Patel och Davidsson (2003), är det oftast textmaterialet: böcker, dagböcker, men även videoinspelningar, transkriberade intervjuer och observationer, som behandlas vid kvalitativ bearbetning. Undervisningen om geometrisk likformighet betraktas i min studie som ett forskningsfenomen och är dessutom en social kontext. Observationerna som har gjorts i undersökningen definieras enligt Johansson och Svedner (2006) som löpande observationer, där man observerar allt som sker och sedan finner man kategorierna vid bearbetningen.

En kvantitativ databearbetning skulle inte vara passande för studien, eftersom det inte är fråga om någon slags ”mätning” eller ”testning” utan snarare en vilja att lyfta fram information

utifrån en kontext (lärarnas undervisning). Larsson (1986) påstår att kvalitativa metoder syftar till att upptäcka hur något fenomen i omvärlden beskrivs. Han menar att forskaren ska sträva efter att beskriva ett fenomen eller kontext genom att upptäcka de kategorier och eventuella modeller som bäst karakteriserar denna. Ett sådant perspektiv passar väl med studiens syfte. Aspekterna som behandlas i studien utgör de följande kategorierna:

1. Likformiga månghörningar.
2. Form.
3. Skala.
4. Alla vinklar lika (hos trianglar).
5. Två vinklar lika (hos trianglar).
6. Förhållanden mellan motsvarande sidorna lika.
7. Förhållanden mellan två av sidorna lika/mellanliggande vinklar lika (hos trianglar).
8. Vilken sida motsvarar vilken.
9. Likformighetens förekomst/likformighet i omvärlden.

Elevernas läromedel behandlar kategorierna nr; 2, 3, 4 och 6, vilka utgör definitioner för likformiga figurer. Vidare definieras i Häggmark (1989) att om två sidor i en triangel är proportionella mot två sidor i en annan triangel och mellanliggande vinkel i de båda trianglarna är lika, så är trianglarna likformiga (kategori nr; 7). Holmström & Smedhamre (2001) behandlar kategorin nr; 9 i en av kapitlets uppgifter (se även respektive rubrik under resultat i analys delen). Därför är det troligt att lärarna kommer att tematisera de ovan nämnda aspekterna i sin undervisning. De övriga kategorierna är valda utifrån egna erfarenheter som student och från undervisning som lärarkandidat. Framförallt är de hämtade från traditionell undervisningen i likformighet i Grekland, där jag fått min tidigare utbildning. Tanken är att se huruvida lärare behandlar likformigheten då det gäller aspekter som inte direkt anges i undervisningslitteraturen, därmed är det inte lika troligt att dessa tematiseras.

Med ”likformiga månghörningar” (kategori nr; 1) menas att geometrisk likformighet omfattar alla månghörningar och det begränsas inte till, exempelvis, enbart trianglar. Om läraren talar om likformighet mellan månghörningar då varieras antal vinklar och vi får en öppning i dimensionen ”månghörningar”. Eleverna erbjuds möjligheten att uppleva likformighet i ett bredare perspektiv. Om däremot läraren enbart fokuserar på trianglar i lektionen då förekommer inte någon variation på antalet vinklar och således öppnas inte den motsvarande

dimensionen. Vidare i analysen kommer ”månghörningar” och ”icke trianglar” behandlas ekvivalent.

Likformiga figurer karakteriseras av samma form (kategori nr; 2). Om läraren tematiserar figureernas lika form som givet, det vill säga om han/ hon explicit anger att de likformiga figurerna har samma form, då missar eleverna möjligheten att uppleva likformighet genom att kontrastera likformiga figurer med icke sådana. Oftast på uppgifterna som rör geometrisk likformighet står att en i figuren (okänd) sida ska beräknas (kategori nr; 8). De motsvarande sidorna som förhåller sig till varandra är oftast lätta att se (tas för givet). Lärare som fokuserar på motsvarande sidors ordning genom att variera den, skapar en öppning till en dimension. Likformighet som fenomen förekommer i omvärlden precis som andra geometriska begrepp. Lärare som i undervisning fokuserar på praktiska tillämpningar förutom ”rena” matematiska uppgifter, erbjuder en öppning till en dimension av variation (kategori 9).

## Urval

Enligt Johansson och Svedner (2006), genomförs ett urval utifrån undersökningsaspekterna. Studien omfattar fyra olika lärare från tre olika gymnasieskolor. Två av skolorna valdes ur Malmö stad och den tredje utanför Malmö. Urvalet ägde rum med hänsyn till följande kriterier:

- Samma didaktiska område,
- samma program,
- samma läromedel och,
- tidsramen för studiens genomförande.

När det gäller det första kriteriet, var det viktigt att all observerad undervisning skulle handla om samma moment, det vill säga den geometriska likformigheten. Alla fyra lärare undervisade på samhällsprogrammet och de använde sig av samma lärobok. Studiens syfte har varit att upptäcka öppningar i dimensioner av variation i undervisningsinnehållet och jag har strävat efter att ha en så ”gemensam plattform” som möjligt. Olika läromedel kan möjligtvis skapa olika förutsättningar till variation och dessutom kan lärares undervisning påverkas av läromedlets uppläggning. På liknande sätt kan man inte heller jämföra ”på lika villkor” sätten som dimensionerna öppnas mellan en matematikundervisning i samhällsprogrammet med en



motsvarande i, till exempel, naturvetenskapligt program. Samtliga lärare observerades vårtermin 2011 och även om min ambition var att observera fler lärare, var det inte möjligt att genomföra det på grund av det ställda kravet, det vill säga att alla kriterier som nämndes ovan skulle gälla samtidigt. Det skulle möjligtvis kunna gå att finna fler lärare men en sådan handling skulle överstiga examensarbetets bestämda tidsram. För övrigt, valdes den ene läraren genom att utnyttja kontakterna som skapades under VFT i en partnerskola utanför Malmö, medan de andra tre valdes ”door to door” genom att personligt söka efter och prata med lärare på olika av Malmös gymnasieskolor.

Två av lärarna undervisar på samma skola och erfarenhetsgraden är olika hos samtliga lärare. De olika erfarenhetsgraderna var inte något som jag eftersökte vid urvalet.

## **Datainsamlingsmetoder**

En av lärarna fick förskjuta sin lektion. Ändringen ledde till att lektionen krockade med en annan lektion, vilken jag hade planerat att observera. Samma lärare ägnade dock sitt nästa undervisningstillfälle till repetition vilket jag fick observera. Han arbetade med samma begrepp som i sin första lektion och dessutom behandlades uppgifter som möjliggjorde öppningar till dimensioner av variation. Samma lärare intervjuades därefter, och ur intervjun framstod att repetitionslektionen var identisk med första undervisningstillfället, då en del av eleverna hade varit frånvarande på grund av någon aktivitet. Så jag anser att resultatens validitet inte påverkas markant.

Som det har diskuterats ovan, använder jag mig observationer och kompletterar dessa med två kvalitativa intervjuer. Från början hade jag tänkt att undersökningen skulle grundas på enbart observationer men efter den missade genomgången (lektionen som fick förskjutas), bestämdes att missen skulle kompenseras genom att intervjua läraren. Att intervjua en lärare till, kom senare med iden att denne var den mest erfarne av alla (fast erfarenhetsgrad inte var eftersökt vid urvalet) och intervjun skulle bidra positivt vid eventuella brister i min observation. Frågeområden som rör intervjufrågorna som ställdes hade en fast karaktär. Enligt Johansson och Svedner (2006), definieras den kvalitativa intervjun utifrån ett fast frågeområde med varierande frågor och varierande svarsalternativ, samt bestämmer intervjuaren ämnet. Författarens strävan, var att genom frågorna få fram information angående deras undervisning i geometrisk likformighet samt vilka aspekter som de skulle lyfta fram. De fyra

intervjufrågorna som ställdes (se bilaga), valdes med hänsyn till att ge lärarna möjlighet att uttrycka sig fritt om hur undervisning skulle genomföras och vad som är viktigt för eleverna att lära. Runesson (1999) hänvisar till frågor som även ”*uppmantar lärarna att förklara, precisera eller ge exempel*”. (sid. 107). intervjufrågorna som formuleras i studien är av samma karaktär som Runessons.

## **Procedur/ databearbetning**

Vid första mötet med lärarna berättade jag om min bakgrund och studiens syfte, samtliga lärare tillfrågades om de accepterade att jag skulle observera deras lektion och tid och datum beslöts för observationerna. Lärarnas anonymitet skyddades genom att använda påhittade namn i studien och dessutom gjorde jag klart att video och ljudinspelningar skulle användas enbart för studiens syfte och de skulle förstöras därefter.

Video och ljudinspelningar genomfördes med en mobiltelefon Eriksson J108i av endast en observatör. Alla inspelningarna kopierades sedan till ett USB minne för att kunna bearbetas med datorn.

Ljud och bildkvalitet var tillfredställande bra, vilket resulterade i bearbetning utan något särskilt problem. Vid två av observationerna var observatören placerad längst bak i hörnet i klassrummet och vid de två andra, i mitten och fram. Kameran var under inspelning fokuserad på läraren och tavlan. Eftersom observatören inte var säker angående ljud och bildkvalitet, antecknade han samtidigt med papper och penna så att eventuella missade sekvenser skulle kunna dokumenteras. Under lektionstid fick observatören förflytta sig mot tavlan för att kunna ta bild på vad som skrevs på nära håll. Under dessa förflyttningar skedde ingen muntlig kontakt med läraren eller eleverna.

Samma tillvägagångssätt, video och ljudinspelning, användes även vid intervjuer. Den första individuella intervjun med lärare ägde rum strax efter lektionstid medan med den andra en vecka senare. Därefter transkriberades samtligt inspelat material. Meningen med transkriptioner är att det ska finnas en text som underlag för tolkningar. Runesson (1999) valde att bearbeta samman intervjuer och observationer som en helhet utan att åtskilja observations och intervjudata utan de senare utgör ett kompletterande underlag för tolkning. Tidigare i metoddiskussion har tydliggjorts att observationer utgör undersökningens huvuddel

så jag har valt att följa samma tillvägagångssätt. Därefter studerades de transkriberade texterna utförligt för att möjliga dimensioner av variation skulle upptäckas.

## Resultat/ analys

Undersökningens resultat redovisas först på en övergripande nivå, där presenteras de olika aspekterna, det vill säga de strukturella delarna som lärarna fokuserar på, som möjliggör öppningar till dimensioner av variation. Därefter redovisas det specifika sättet som de enskilda lärarna behandlar innehållet då de undervisar om geometrisk likformighet. Lärarna tematiserar likformighetens strukturella delar (aspekter) genom att antingen variera dem eller hålla dem konstanta (de tas för givna). Genom att vissa aspekter varierar medan andra hålls konstanta, öppnas olika dimensioner av variation ifråga. Lärarnas namn är påhittade (Nils, Sven, Alex och Eskil).

Samtliga aspekter på geometrisk likformighet som lärarna har fokuserat på, sammanfattas nedan:

1. Likformiga månghörningar,
2. form,
3. skala,
4. alla vinklar lika (hos trianglar),
5. två vinklar lika (hos trianglar),
6. förhållanden mellan motsvarande sidorna lika,
7. förhållanden mellan två av sidorna lika/mellanliggande vinklar lika (hos trianglar),
8. vilken sida motsvarar vilken och
9. likformighetens förekomst/likformighet i omvärlden.

Studien har visat att aspekterna som nämnts ovan, utgör en potentiell dimension av variation beroende på hur läraren behandlar undervisningsinnehållet. I fortsättningen kommer att beskrivas sättet som var och en lärarna tematiserar aspekterna. Jag väljer presentera denna med varje aspekt som rubrik och lärarnas namn som underrubriker.

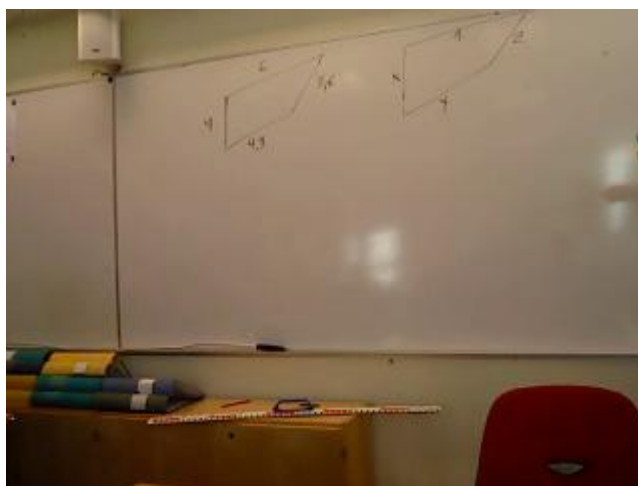
**Förklaringar:** Lärarna Nils, Alex, Sven och Eskil presenteras (i dialogrutorna) med respektive bokstäverna N, A, S och E. Eleverna presenteras med E1, E2 (de olika siffror används för att skilja eleverna som pratar), EE (när två eller flera elever pratar samtidigt). Med ... menas en kort paus medan med (...) en längre paus. Med [...] menas att en lång paus eller någon annan diskussion (som inte tas upp i analysen) har förekommit.

## Likformiga månghörningar

*Nils*

N: Vi tar ett exempel på tavlan och sen jobbar ni själva (han ritar två likformiga fyrhörningar)

N: Den är en egen uppgift... ok jag vill att ni ska använda detta nu bara när vi löser exemplet. Ja... därför jag försöker använda programmet så mycket som möjligt... (han ritar slarvigt)... men de ska vara likformiga, så ska de ha alla vinklarna lika och förhållande mellan motsvarande sidor är detsamma och vi behöver inte veta mer för att kunna räkna hur lång denna sida är... och det ska vi göra.



*Bild 1 Likformiga fyrhörningar.*

Nils har enbart diskuterat om likformighet hos trianglar tidigare i lektionen. I det här fallet ökar Nils antalet vinklar till fyra och ritar två likformiga fyrhörningar istället (bild 1). Det som Nils gör, är att möjliggöra en variation i dimensionen ”månghörningar”. Elever får uppleva att likformighet gäller även andra figurer förutom trianglar. Aspekterna ”alla vinklar lika” och ”förhållanden mellan motsvarande sidorna lika” tas för givna.

*Sven*

Sven börjar sin lektion med att rita två likformiga rektanglar bredvid varandra på tavlan och dessutom skriver han ut sidornas mått för varje sida.

S: Vad har jag här Jesper? (han pekar på den lilla rektangeln)

E1: en rektangel

S: Tack! Markus vad har jag här? (pekar på den stora rektangeln)

E2: ... rektangel

[...]

S: ... Vad är då likformighet? Ja... När man ser detta så vet man vad det är. De är likadana men den ena är större än den andra, men om man vill uttrycka sig matematiskt så är det så här... att förhållande mellan sträckorna är lika. (...) alltså likformiga betyder lika former men inte bara det utan att en sak till som är självklar. Den vinkeln är 90 grader ... den med ... den vinkeln är 90 grader, den med...[han pekar på rektanglarnas vinklar parvis]. Vinklarna är alltså lika med varandra.

Sven öppnar dimensionen ”månhörningar” genom att presentera två likformiga rektanglar. Han tematiserar en ”icke triangulär figur” och anger explicit att förhållande mellan sträckorna är lika och vinklarna är lika, alltså dessa två aspekter tas för givna (bild 2, vänster sida).

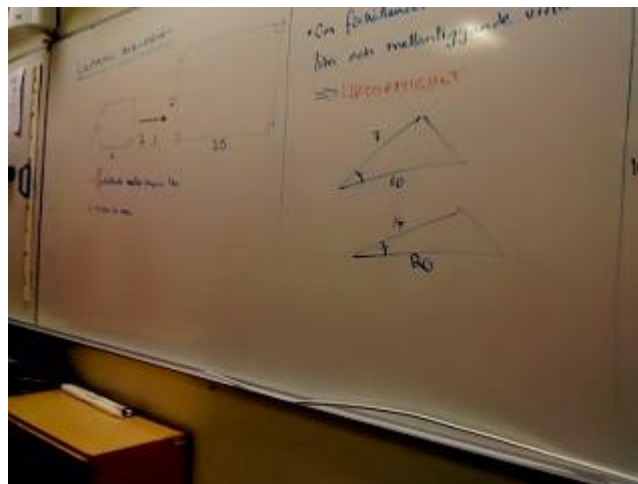


Bild 2 Likformiga rektanglar (till vänster)

*Alex*

Ingen variation upplevdes av eleverna i dimensionen ”månhörningar” Alex fokuserade enbart på trianglar.

*Eskil*

Likaså Eskil, erbjöd ingen variation i samma dimension.

## Form

Lärarna Nils, Alex, och Sven, uttrycker sig explicit om likformiga figurer. Det innebär att aspekten ”samma form” alltid tas som givet på alla sammanhang i undervisning.

Eleverna får bara uppleva två figurer som alltid ser ”likadana ut”, utan att kunna jämföra med någon annan figur som ser ”annorlunda” ut. Det finns således ingen öppning till dimension ”form”. Läraren Eskil tematiserar aspekten på ett annat sätt.

E: Idag på morgonen har ni gjort en likformig avbildning. Vad gjorde ni då? Någonting när ni hade stigit upp från sängen...

E1: Tittade i spegeln...

E: Jättebra... Sen kan det bli en förstoring eller en förminskning. Om ni går på Lustiga huset på Tivoli i Köpenhamn, så kan ni få en väldigt tjock mage eller en väldigt liten kropp... Det är inte en likformig avbild längre, för att proportionerna är olika, för olika punkter av kroppen.

Eskil fokuserar på aspekten ”form” genom att variera den. Variationen sker i termer av kontrast. Eleverna får möjlighet att jämföra likformighet med icke-likformighet, vilket kan uppfattas som en öppning till dimensionen av variation ”form”.

## Skala

*Nils*

Nils börjar sin lektion med att presentera två likformiga trianglar på tavlan med hjälp av dataprogrammet Geogebra.

N: Ok, vi kör igång ... titta hur den ändrar (han förstorar och förminskar triangelns storlek med markör) man kan ändra ... ni ser här ... jag har en triangel däruppe med ett antal punkter, jag ändrar storlek på den och sen titta på vad som händer neråt såhär ... vi har en triangel däruppe (han pekar på den, den lilla) ... och en triangel därnere (pekar på den stora) ... de påminner om varandra va? De har olika storlekar men de påminner om varandra ...

[...]

Nils har redan markerat sidorna med respektive längder på båda trianglarna (bild 3).

N: Men vi kan titta på längderna på trianglarna ... hur kan vi se på längderna att de är likformiga? Jag har längderna här... Vad sa du Eva?

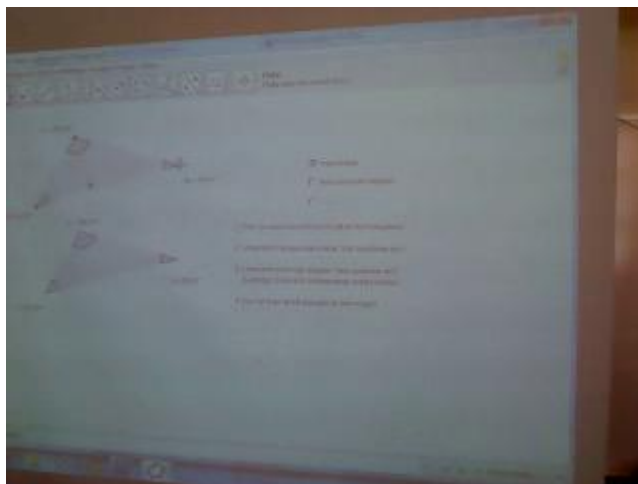
E1: Är sträckorna inte lika långa? ... De förhåller sig på något sätt va?

N: Jag vet inte (skratt) men jag tror att ni har någonting på spåret ... någonting att problematisera kring längderna ... men man måste göra en sak till ...

E2: har det inte med skalan ...

N: Skalan!! Det låter intressant också ... om man tar fyra gånger två här då får man ungefär åtta här ... om vi tar den gånger två blir det ungefär den. [Det som Nils gör är att multiplicera varje sidolängd på den lilla triangeln med två och sedan pekar han på den motsvarande sidan på den stora] ... Har ni förstått det?

EE: Ja...



*Bild 3 Likformiga trianglar med Geogebra*

Nils tematiserar aspekten ”skalan”, utan att explicit ange vad begreppet skala betyder, han låter eleverna själva komma på det. Genom att variera sidornas längder och samtidigt hålla formen konstant öppnas en dimension av variation.

### *Sven*

Sven fortsätter sin lektion genom att ställa frågor som rör de två likformiga rektanglarna som han ritat på tavlan.

S: Jesper du har mätt den här... Kan du se sambandet mellan rektanglarna, inte om jag har ritat slarvigt, men jag har måtten ...

E1: Fyra gånger sju på denna sida blir detsamma som sidan på det andra.

S: Ja, exakt! Hur uttrycker du det?

E1: De är förminskande delar.

S: Det är förminskning... eller förstoring om vi ser å andra hållet.

E1: Jag menar...

S: Du menar rätt! Det betyder åt vilket håll du utgår. Alltså är det en förminskning men hur många gånger? Jesper?

E1: sju.

S: Alltså det handlar om skalan och det kan du. Tre gånger sju blir tjugo, fyra gånger sju blir tjugofem. Den är förstord, det är ritad pil i detta håll, det har jag tänkt i alla fall. Den är sju gånger



större: Det är skalan som vi kallade det innan. Det är också en likformig avbildning. Det är så som likformighet. Vad är då likformighet? Ja, när man ser detta så vet man vad det är, de är likadana, men den ena är större än den andra. Men, om man vill uttrycka sig matematiskt så är det så här... att förhållandet mellan sträckorna är lika.

Sven fokuserar på aspekten ”skala” genom att variera originalet med vilken jämförelse görs. På ett sådant sätt erbjuds eleverna möjligheten att uppleva begreppet ”skala” åt båda håll, det vill säga som förminskning respektive förstoring. Sven behåller dock aspekterna ”förhållande mellan sidorna”, ”alla vinklar lika” och ”form” konstanta, det vill säga att de tas för givna. En ny dimension av variation öppnas (bild 4).

S: ...den ena är större än den andra, men båda är samma figur. De är likformiga. Förhållandet mellan sidorna är lika och vinklarna är lika stora. Exakt. Super självklart!

Lärarna Alex och Eskil tematiserar skalan genom att explicit ange vad begreppet skala innebär. Alex ritar två likformiga trianglar och anger längderna på två av sidorna (två, fyra respektive åtta och sexton). Mellan trianglarna, ritar han en pil som riktar sig mot den stora triangeln och skriver: skala 4:1 (se tavelfotografen). Titta på den här bilden ... den är så väsentlig ... vad betyder att vi använder skalan?

E1: Jag har förstorat

A: Vad har jag förstorat då?

E1: triangeln

A: Triangeln ja, den har blivit större fyra gånger och vilka delar på trianglarna har blivit fyra gånger så stora?

E1: Sidorna.

A: Sidorna har blivit fyra gånger så stora och så de förhåller sig till varandra på samma sätt.

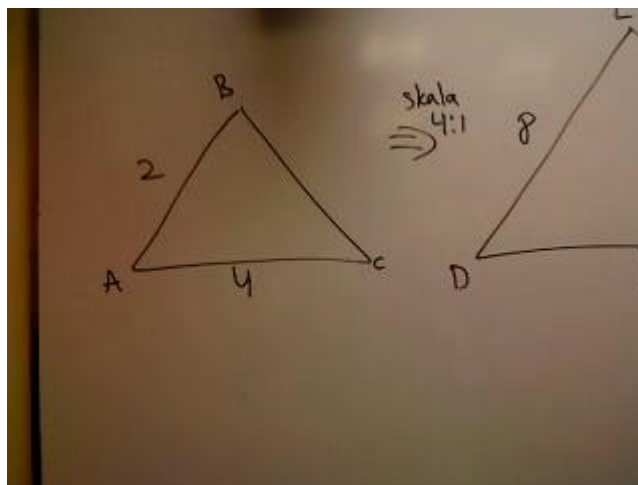


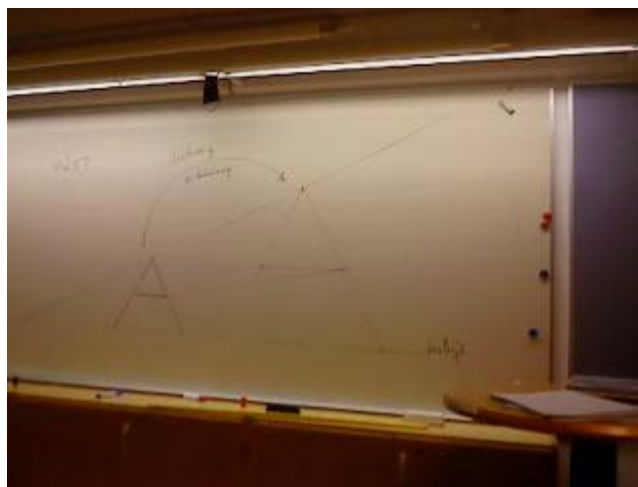
Bild 4: Alex framställning av skala

Till skillnad mot Sven, berörs aspekten skala som enkelriktad, det vill säga som förstoring, vilket i sin tur innebär att ingen dimension av variation öppnas.

Läraren Eskil ritar på tavlan bokstaven A och bredvid ritar han en likformig bokstav, två gånger större (han ritar med stor precision och använder linjalerna). Dessutom anger Eskil måtten (bild 4). Exemplet är hämtat ur läromedlet Holmström & Smedhamre (2001).

E: Alla avstånd som jag mätte på mitt objekt (han menar det lilla A) har jag fördubblat. Jag har gjort en likformig avbildning (han pekar på det stora A). Likformig är ordets sätt för båda figurerna påminner starkt om varandra. De har samma form båda. Skalan definieras man som bild genom objekt eller verklighet.

Skalan tematiseras och förklaras explicit och på ett enkelriktat sätt, i detta fall enbart som förstoring. Eleverna upplever ingen variation på aspekten ”skala” och den motsvarande dimensionen av variation öppnas inte.



*Bild 5 Eskils framställning av skalabegrepp*

Eskil fortsätter:

E: ... det kan uttryckas som 2:1 eller 200 % här har vi många möjligheter att skriva skalan på. Sen frågar Eskil efter areaskalan också. Det finns möjlighet att skriva: Areaskalan = längdskalan i kvadrat. Den arean som i den här figuren innesluts, skapar då en area som är fyra gånger större i den nya figuren.

Eskil möjliggör två öppningar, den ena i dimensionen ”skalans skrivsätt” och ”flerdimensionell skala”.

## Alla vinklar lika (hos trianglar)

Studien visar att i princip samtliga lärare berörde att hos likformiga trianglar är alla deras motsvarande vinklar lika med varandra. Sättet de fokuserar på aspekten varierar dock. Lärarna Nils och Alex anger explicit att likheten gäller då det råder likformighet mellan trianglarna.

N: ... Det har ingen betydelse, utan man kan ha en super stor triangel och en jätte liten ... de har samma vinklar och de är likformiga.

A: ... Så jag har förstorat figuren så att alla sidorna blir fyra gånger större men inte vinklarna. Vinklarna är precis lika stora. Och fyller man detta, så pratar man om likformighet (Alex jämför två trianglar med skalan 1:4).

I båda beskrivningar ovan, tas likheten för givet. Aspekten hålls konstant och eleverna upplever ingen variation (se även bild 3).

Sven och Eskil fokuserar på aspekten på ett annat sätt.

Sven har redan förklarat skalabegreppet och likformigheten hos rektanglarna. Han anger likheten mellan rektanglarnas vinklar som ”super självklar” (se rubrik skala), och fortsätter:

S: ... men om vi går in på trianglar, så kanske det inte blir samma sak, vilket det är, men inte lika enkelt (han ritar två likformiga trianglar där han markerar två motsvarande vinklar som lika med varandra, medan han ignorerar den tredje vinkeln). ... Om de två vinklarna är lika, då måste den tredje vara lik och de är likformiga.

På likartat sätt förklarar Eskil:

E: ... Vad står det speciellt för trianglar? Om man vill bevisa att två trianglar är likformiga, är detta viktigt att nämligen bevisa att två vinklar i den ena triangel är lika stora som två vinklar i den andra, vilket innebär att den tredje också är lika stor med tanken på att vinkelsumma är 180 grader.

Från beskrivningarna ovan, framstår att likheten mellan samtliga motsvarande vinklar inte tas för givet. Däremot, tas aspekten ”två vinklar lika (hos trianglar)” för givet. Lärarna Sven och Eskil öppnar en dimension av variation på aspekten ”tre vinklar lika”.

## **Två vinklar lika (hos trianglar)**

Lärarna Nils och Alex har inte alls berört aspekten i undervisning. Lärarna Sven och Eskil har tematiserat aspekten utan variation, vilket framgår av analysen ovan. Att två vinklar är lika hos likformiga trianglar fokuseras inte alls, eller det tas för givet och således finns det ingen öppning till någon dimension av variation.

## **Förhållande mellan motsvarande sidorna lika**

*Nils*

Nils fortsätter sin lektion:

N: Ibland måste man avgöra genom att titta på sidorna och om vi tänker att den är ungefär dubbel som den [han pekar på de motsvarande sidorna parvis] ... vi säger så här att förhållandet mellan den och motsvarande sidan på den triangeln är lika stort som förhållandet mellan denna sida och motsvarande där och mellan den och den [han pekar parvis på alla motsvarande sidorna i båda trianglar].

Aspekten ”förhållande mellan sidorna lika” är explicit uttryckt och varierar inte, det vill säga det tas för givet och dimensionen av variation öppnas inte.

*Alex*

Under rubriken ”skala” har resultaten visat att läraren Alex explicit anger att förhållande mellan sidorna är lika, det vill säga att den respektive aspekten tas för givet och ingen dimension av variation öppnas.

*Sven*

Läraren Sven jämför sidorna på de rektanglarna (måttan är tre och fyra, respektive tjugo och tjugoåtta).

S: Jesper fortsätt. Vad är tjugo genom tre?

E11: sju.

S: Vad är tjugoåtta genom fyra?

E11: sju.

S: Alltså förhållande är lika. Hade det blivit åtta, hade de (rektanglarna) inte varit likformiga.

Sven anger att förhållande mellan sidorna är lika, fast inte innan eleven utmanas att komma på det själv, vilket betyder att ”förhållande mellan sidorna lika” inte tas för givet. Sven berör även fallet att likheten inte råder (”hade det blivit åtta, hade de inte varit likformiga”). Eleverna har möjligheten att uppleva kontrasten och en dimension av variation har öppnats.

*Eskil*

Eskil anger explicit att förhållande mellan sidorna är lika.

E: Euklides har också visat att två trianglar är likformiga om förhållande mellan motsvarande sidor är lika.

Ingen variation förekommer.

### **Förhållanden mellan två av sidorna lika/ mellanliggande vinklar lika (hos trianglar)**

Aspekten ”förhållande mellan två av sidorna lika/mellanliggande vinklar lika hos trianglar” har inte alls tematiserats av lärarna Nils, Alex och Eskil. Läraren Sven fokuserar på aspekten, men det gör han genom att explicit ange att det gäller.

S: ... också, om förhållande mellan sidorna är lika och mellanliggande vinkeln lika, har man likformighet.

Ingen variation skapas och ingen dimension av variation öppnas.

### **Vilken sida motsvarar vilken**

Samtliga lärare gick genom några räkneuppgifter på tavlan, där eleverna utmanades att räkna ut en obekant sida hos den ena figuren. Lärarna Nils, Sven och Eskil presenterar sina uppgifter genom att rita figurerna på ett sådant sätt att eleverna lätt kan se motsvarighet mellan sidorna (bilder 6, 7, och 8).



Bild 6 Nils uppgift

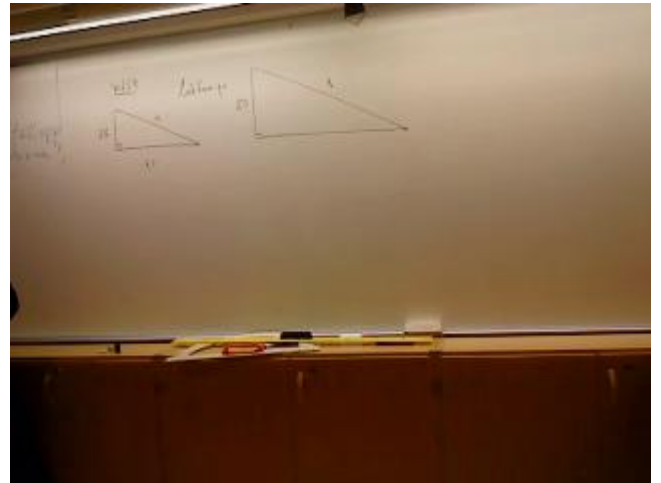


Bild 7 Eskils uppgift

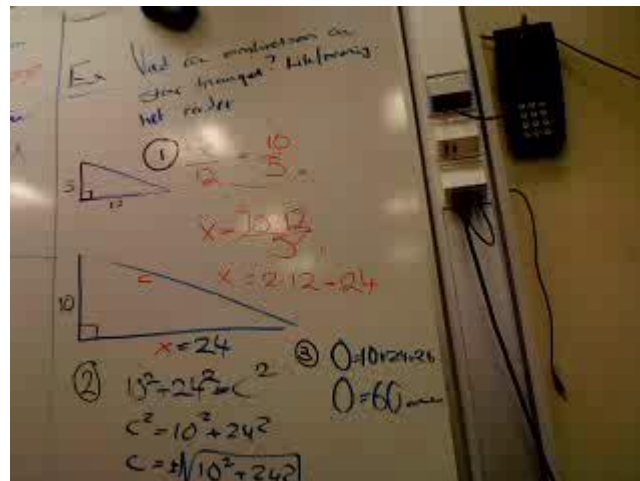


Bild 8 Svens uppgift

På så vis tar lärarna sidoordning (vilken sida som motsvarar vilken) som givet och eleverna upplever ingen variation på ordningen, vilket i sin tur innebär att öppningar inte möjliggörs till någon dimension av variation.

Läraren Alex ritar figurer så att motsvarighet inte är direkt synlig (bild 9).

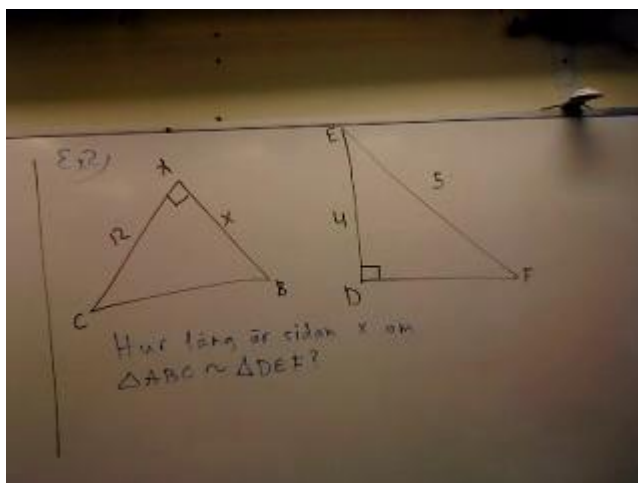


Bild 9: Alex uppgift

A: Vi tar första steget. Någon som vill redovisa?

E1: Dela...

E2: se till att sidorna motsvarar.

A: Ja. Vi vrider figuren. Jag skulle tipsa er så här.. även om ni har tur att se vilken sida motsvarar vilken, vrid gärna figuren. Det känner man på (...) ni ska vrida så att ABC ska motsvara DEF. Jag har D där nere och A där uppe. Alltså ni får vrida på detta vis så att A ska vara här... B här... och C här. Vilken sida är där då?(Alex pekar på DE)

E1: tolv?

E2: x

A: Ja! x. och den där? (pekar på DF)

E2: tolv.

A: Yes. Är ni med på det?

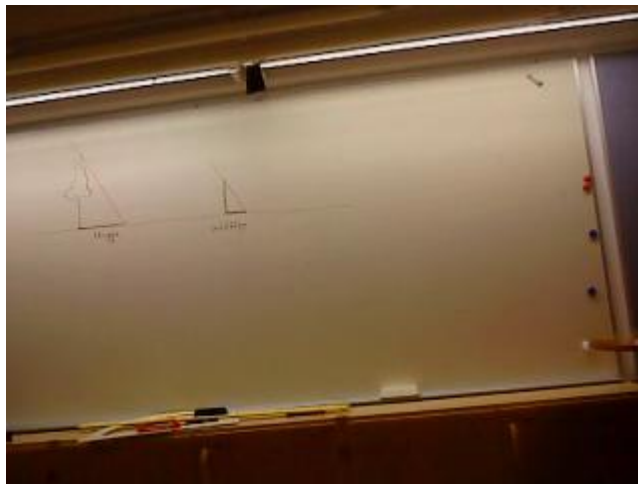
EE: mm

Från sekvensen ovan framstår att den förvirring som eleverna upplever, kan uppfattas som en variation på ordningen som läraren åstadkommer. ”vilken sida motsvarar vilken” tas inte för givet, medan andra aspekter som ”form” och ”förhållande mellan sidorna lika” är konstanta (på tavlan anges att trianglarna ABC och DEF är likformiga). En öppning till dimension av variation ”ordning” möjliggörs.

## Likformighetens förekomst/ likformighet i omvärlden

Lärarna Nils, Sven och Alex, berör inte likformighet i omvärlden så att aspekten har förblivit ofokuserat, och således ingen variation av dimension öppnas.

Läraren Eskil presenterat dock en uppgift som är relaterad med verkligheten. I lektion, använder Eskil läromedlet varifrån uppgiften är hämtad. Eleverna utmanades att räkna ut trädets höjd (bild 10).



*Bild 10: trädets höjd*

E: Vi ska ta reda på trädets höjd. Vi kan inte göra det med måttband men eftersom solen är vacker, använder vi skuggan. Här inför vi helt enkelt en måttkäpp, och solstrålen är parallella eftersom solen är långt borta. Så får vi två trianglar ... rätvinkliga ... vet vi någonting om skuggornas längd?

... Jo, det gör vi

E1: 0,75 cm

E: och skuggan här?

E1: 5,6

E: Det vi skulle kunna göra är en ekvation utifrån likformighet.

Eskil skriver sedan ekvationen  $\frac{h}{1,7} = \frac{5,6}{0,75}$  där:

$h$  = trädets längd,

1,7 = käppens längd,

5,6 = trädets skugga,

0,75 = käppens skugga.

Eskil fortsätter:

E: Om solen skiner, är det intressant att veta hur hög är kyrktornet i (stadens namn).

Läraren Eskil tematiserar likformighet genom att variera den. Med variation menas här att läraren övergår från rena ”opersonliga” matematiska uppgifter till konkreta exempel som



hämtas från omvärlden. Samtidigt hålls ”formen” och ”förhållande mellan sidorna lika” konstanta. Genom att skriva ner ekvationen utifrån likformighet, anger läraren explicit att de sistnämnda aspekterna råder. Det uppfattas som en öppning i dimensionen av variation ”omvärld” har öppnats. Läraren Eskil är medveten om variationen han skapar, vilket framkommer i intervjun: ”Jag tror att mina exempel ur dagens undervisning är bra exempel. Trädets höjd, slå ner en käpp, använd solstrålar, eller den lilla anekdoten jag berättade kring kyrktornets höjd”.

## Sammanfattning av resultaten

Nedan visas en sammanfattande tabell av studiens resultat. Tabellen visar antalet öppnade dimensioner av variation, så väl per lärare som per fokuserad aspekten ifråga. På första raden i tabellen står alla aspekter som lärarna fokuserade på i ordning enligt nedan. På sista raden visas antalet öppnade dimensioner av variation per aspekt. På första kolumnen står lärarnas namn, och på sista, antalet öppnade dimensioner av variation per lärare. Slutligen redovisas antalet öppnade dimensioner. Aspekterna är följande: 1. Likformiga månghörningar. 2. Form. 3. Skala. 4. Alla vinklar lika (hos trianglar). 5. Två vinklar lika (hos trianglar). 6. Förhållanden mellan motsvarande sidorna lika. 7. Förhållanden mellan två av sidorna lika/mellanliggande vinklar lika (hos trianglar). 8. Vilken sida motsvarar vilken 9. Likformighetens förekomst/likformighet i omvärlden.

Fokuserade aspekter/ Lärare	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summa
Nils	1	givet	1	givet	-	givet	-	givet	-	2
Sven	1	givet	1	1	givet	1	givet	givet	-	4
Alex	-	givet	givet	givet	-	givet	-	1	-	1
Eskil	-	1	2	1	givet	givet	-	givet	2	6
<b>Antal dimensioner/aspekt</b>	2	1	4	2	0	1	0	1	2	<b>Totalt: 13</b>

## Diskussion

Studien syftar till att erbjuda läsaren en bild av antalet dimensioner av variation som öppnas, dels av den enskilda läraren dels som en total summa. Studien har, utifrån frågeställningarna, kartlagt likformighetens aspekter. De nio kategorierna som har lyfts fram är även svaret på frågan: "Vilka aspekter på likformighet fokuserar lärare på?". Varefter aspekterna analyserats utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv med hjälp av löpande observationer. Ur analysen besvaras frågan: "vilka av dessa aspekter utgör en dimension av variation?". Dimensioner av variation öppnas om lärare tematiserar aspekterna ifråga genom variation.

Studien har undersökt hur fyra lärare behandlar lektionsinnehållet då de undervisar i geometrisk likformighet. I resultatavsnittet framgick att de fyra lärarnas undervisning sätter fokus på vissa aspekter medan andra förblir ofokuserade, således erbjöds ett antal dimensioner, medan andra dimensioner inte öppnades. Undersökningen visade att totalt 13 fall av öppnade dimensioner av variation registrerades. Det som sticker ut i tabellens resultat, är att aspekterna nummer 5; "två vinklar lika (hos trianglar)" och 7; "förhållande mellan två sidor lika/ mellanliggande vinkel lika (hos trianglar)" förblivit ofokuserade eller tagits för givna, varpå ingen dimension av variation öppnats. Båda aspekterna utgör grundläggande kriterier för att likformighet ska gälla. Det faktum att "två vinklar lika (hos trianglar)" förblivit ofokuserad eller tagits för givet, kan bero på lärarna förutsatt att eleverna redan inhämtat kunskapen att vinkelsumman hos trianglar är lika med 180 grader och därmed tar lärarna aspekten som "självklar". Anledningen till att aspekt nummer 7; "förhållande mellan två sidor lika/ mellanliggande vinkel lika (hos trianglar)" förblev ofokuserad av tre lärare beror eventuellt på att de anser att den inkluderas i aspekt nummer 6; Förhållanden mellan motsvarande sidorna lika och därmed anser att aspekten inte behöver återupprepas.

Ur tabellen framstår vidare att lärarna har "värderat" andra aspekter som viktiga såsom nummer 3;"skala" (fyra fall av öppnande) och 4; "alla vinklar lika". Aspekten "alla vinklar lika (hos trianglar)", tematiserades som givet av två av lärarna, medan de andra två varierade samma genom att ta "två lika vinklar lika (hos trianglar)" för givet. Faktumet att de flesta dimensionerna av variation har öppnats på aspekten nummer 3,"skala", tolkas som att lärarna anser att begreppet underlättar förståelsen för likformighet. Min uppfattning är att eleverna relaterar likformigheten med en förminskning eller förstoring av en geometrisk figur.

Läraren Alex öppnar enbart en dimension av variation. Det kan bero på att Alex lektion var en repetition (Alex var nämligen den läraren, som förskjutit sin lektion, vilket omnämndes i metoddelen). Det betyder att Alex kan ha tematiserat aspekterna på ett annat sätt vid sitt första undervisningstillfälle och möjliggjort ytterligare öppningar till någon dimension av variation. En kompensation till validiteten gjordes i och med intervjun med Alex. Då Alex tillfrågades om hur han hade tänkt inleda kapitlet ”geometrisk likformighet”, svarade han ”Det var precis det du såg på lektionen”. Svaret kan tolkas som att repetitionstillfället inte skilde sig markant från första tillfället, således är påverkan på resultatets validitet inte kritisk.

Hur öppningar av dimensioner av variation uppstår i en undervisningskontext, kan diskuteras utifrån de inlärningsteoretiska perspektiven som beskrevs i teoridelen. Då lärare behandlar innehållet (geometrisk likformighet) ges eleverna möjligheter att utvidga sin erfarenhetsvärld och således skapa ny kunskap inom området, vilket troligen varit omöjligt utan lärarens medverkan. Då lärarna tematiserar likformighetens aspekter genom variation, öppnas olika dimensioner av variation och eleverna uppmuntras då till bredare kunskaper samt utmaning av existerande kunskaper. Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv kan de olika tematiserade aspekterna och motsvarande dimensioner av variation som eventuellt öppnas, tolkas som en matematisk utmaning vilket utgör en potential för elevernas lärande, vilket stöds av Runesson (1997). Sett ur ett sociokulturellt perspektiv, expanderas den proximala utvecklingszonen med hjälp av öppningar av dimensioner av variation. I elevernas läromedel förklaras likformighets aspekter explicit. I Holmström och Smedhamre (2001) står:

*”För likformiga figurer gäller att*

- *förhållandet mellan motsvarande sträckor är lika*
- *motsvarande vinklar är lika stora” (s. 57).*

Läraren Sven, varierar förhållandet mellan motsvarande sträckor så att eleverna får möjligheten att uppleva kontrasten och en dimension av variation, vilken troligtvis inte hade öppnats utan lärarens medverkan.

I sin avhandling intervjuar Runesson (1999) lärarna vid två tillfällen. Dessutom har hon observerat undervisningen en längre tid, som omfattar 20 timmar och 40 minuter sammanlagt. Urvalskriteriet som användes i hennes studie skiljer sig från det som används i denna undersökning. Hon kopplar den åstadkomna variationen med lärarens möjligheter att

reflektera över sin matematikundervisning. Vidare betonar hon att en sådan reflektion påverkas av vissa situationer, såsom fortbildning av olika slag, utvecklingsarbeten i matematik eller handledning av lärarstudier, vilka avgjorde hennes urval. Till skillnad från Runesson (1999) har denna studie inte tagit någon hänsyn till ett sådant kriterium, utan fokuserat på att finna en ”gemensam plattform”, för att uppnå ett trovärdigt resultat (se rubriken Urval). Det hade dock varit intressant att inkludera en sådan variation i min urvalsgrupp, men det skulle strida mot tidsramen för studiens genomförande. Fastän en sådan variation inte eftersöktes, visade det sig dock att den förekom inom gruppen i form av olika erfarenhetsgrad och deltagande i aktiviteter. Nils till exempel, fick sin lärarexamen för ett och halvt år sedan, medan Eskil har undervisat i 35 år i båda högstadiet och gymnasiet, samt har varit handledare till ett antal lärarstudier. Ur detta perspektiv är Runessons analys betydligt djupare än vad denna studie är.

Johansson och Svedner (2006), påstår att resultatet karakteriseras av hög validitet om det täcker hela det området som var planerat att undersökas. Studien rör nio aspekter sammanlagt som är fundamentala för geometrisk likformighet. Det finns möjligtvis fler aspekter som rör området ”geometrisk likformighet” vilka inte har framkommit i studien. Under rubriken ”val av metod” har betonats att forskaren ska sträva efter att beskriva ett fenomen eller kontext genom att upptäcka de kategorier som bäst karakteriserar denna. Kategorisering handlar om individuella tolkningar, vilka är subjektiva och det finns inte någon garanti att en annan forskare kommer fram till exakt samma kategorisering om denne skulle genomföra en liknande studie. Ett exempel på en aspekt som inte har tagits med är ”förhållande mellan delarna lika” (i transversalsatsfallet). ”Topptriangelsatsen” och ”transversalsatsen” behandlas under ett senare kapitel i elevernas läromedel och förutsätter en förförståelse bestående av det tidigare avsnittet ”likformiga avbildningar”, vilket har observerats i studien. På grund av eventuellt borttappade aspekter brister innehållsvaliditeten, men arbetets inre validitet då det gäller de nio aspekterna som studien rör, anses vara hög därför att de nio planerade kategorierna har undersökts.

Studien har ett inlärningsteoretiskt fokus och ambitionen är att det variationsteoretiska perspektivet ska erbjuda en alternativ undervisning då det gäller området geometrisk likformighet. Studien har inte koncentrerat sig på att jämföra variationsteorin med andra perspektiv på lärande och därför inte tagit ställning till variationsteorin, då det inte varit studiens syfte. Utan variationsteorin kan användas som ett komplement till andra

perspektiv och kan vara av betydelse i samband med till exempel lektionsplanering, där strävan är att matematiska utmaningar skapas för eleverna. Det sistnämnda stämmer överens med kursplanerna i matematik:

”I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande” (Skolverket 2000).

Lpf 94 poängterar att lärandet kommer till uttryck i olika former och undervisningen får inte vara ensidig genom att betona den ena eller den andra formen. Dessutom:

”elevernas kunskapsutveckling är beroende av om de får möjlighet att se samband. Skolan ska ge eleverna möjligheter att få överblick och sammanhang” (sid. 6).

Därmed stärks användandet av ett variationsteoretiskt perspektiv i undervisning och kan bli ett kraftfullt verktyg för matematikläraren. Eftersom hur läraren hanterar lektionsinnehållet är starkt beroende för hur utmaningar skapas.

## **Didaktiska konsekvenser**

Studien behandlar en av de viktigaste grunderna för matematikundervisningen, hur en elev genom lämplig variation av begreppets olika aspekter får möjlighet att förstå det matematiska begreppet som helhet, i det här fallet likformighet. Min ambition som blivande lärare och intresserad av att utmana och stimulera elevernas lärande, har drivit mig att studera det variationsteoretiska perspektivet som ett alternativt verktyg till undervisning inom flera matematiska begrepp. Utan att veta den teoretiska utgångspunkten har jag redan praktiserat variationsteorin på min VFT, i och med studien har jag fått bekräftat vad jag gjort och hittat ett teoretiskt stöd för min undervisningsmetod; hur jag organiserar lektioner och genomför desamma.

## **Vidare forskning**

Att studera hur olika dimensioner av variation kan skapas inte bara genom hur läraren behandlar innehållet utan också genom elevernas frågor och funderingar. Min fundering är om det är så att en ny variation av dimension öppnas genom frågan eller om läraren bortser från i

frågan och en dimension därmed stängs. Det vore en intressant utgångspunkt för framtida forskning.

## Käll- litteraturförteckning

Transkriberingar av observationer och intervjuer förvaras hos författaren.

Carlsson, Britta (2002). *Variationsteori och naturvetenskapligt lärande*. Luleå: Luleå tekniska universitet.

Dysthe, Olga (red.) (2001). *Dialog, samspel och lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Hatch, J. Amos (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Albany: State University of New York Press.

Holmström, Martin & Smedhamre, Eva (2001). *Matematik från A till E. Gymnasiets matematik kurs B*. Stockholm: Liber.

Hägemark, Per (1989). *Laborativ geometri*. Lund: Studentlitteratur.

Jarworski, Barbara (1998). Att undervisa i matematik: ett social-konstruktivistiskt perspektiv. I Engström, A. (red), *Matematik och reflektion* (s. 97-123). Lund: Studentlitteratur.

Johansson, Bo & Svedner Per Olof (2006). *Examensarbetet i lärarrummet. Undersökningsmetoder och språklig utformning*. Uppsala: Kunskapsföretaget.

Krokmark, Tomas (1990). *Fenomenografi och lärares didaktik. Konturer till en innehållsbeskrivning av lärares undervisningskompetens*. Göteborg: Göteborgs universitet.

Kullberg, Angelika (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Larsson, Staffan (1986). *Kvalitativ analys – exemplet fenomenografi*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, Ference & Booth, Shirley (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Olteanu, Constanta (2007). *"Vad skulle x kunna vara?" Andragrads ekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande*. Umeå: Umeå universitet.

Patel, Runa & Davidsson, Bo (2003). *Forskningsmetodikens grunder. Att planera, genomföra och rapportera en undersökning*. Lund: Studentlitteratur AB.

Runesson, Ulla (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla matematiskt innehåll*. Mölndal: Göteborgs universitet.

Skolverket (2000). *Kursplan* hämtad från

<http://www.skolverket.se/sb/d/387/a/16143/func/kursplan/id/4086/titeld/> Kursplan för matematik hämtad 2010-12-18

Utbildningsdepartementet (1994). *Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf 94*.

*Gymnasieskolan, gymnasiesärskolan, den kommunala vuxenutbildningen, statens skolor för vuxna och vuxenutbildningen för utvecklingsstörda*. Stockholm: Skolverket/ Fritzes.



# Bilaga 1

## Intervjufrågor

- Berätta lite om hur du tänkte när du införde det här avsnittet.
- Vad tycker du är viktigt? Varför gör du så?
- Vad är det eleverna ska lära sig? Hur ska de lära sig det?
- Ge mig ett praktiskt (muntligt) exempel som du tycker att är lämpligt för en ”medelelev”. Hur hanterar du det?